تکلیف ۳۴ [illegible]

۱۸٫۲۵

①

$y=ax+b \Rightarrow f'(۳)=a$ $(۰,۱)$ $(۳,۵)$ $\frac{۵-۱}{۳-۰}=\frac{۴}{۳}$ ✓

$y=\frac{۴}{۳}x+b \Rightarrow f'(۳)=\frac{۴}{۳}$

۲

---

②

$(-۱,۱)$ $(۲,۲)$ $\frac{۲-۱}{۲-(-۱)}=\frac{۱}{۳}$ $f'(A)=\frac{۱}{۳}$ $f'(x)=\frac{a}{۲\sqrt{ax-۱}}$

$y=ax+b \Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x+\frac{۴}{۳}$

$f(A)=\frac{A}{۳}+\frac{۴}{۳}=\sqrt{aA-۱}$ $\Big\} \Rightarrow f'(A)=\frac{a}{۲\sqrt{aA-۱}}=\frac{a}{۲(\frac{A}{۳}+\frac{۴}{۳})}=\frac{۱}{۳}$

۱٫۵

---

③

$f(x)=\frac{x^۲+mx+۱}{x+۳}$ $f'(x)=\frac{x^۲+۶x+۳m-۱}{(x+۳)^۲} \Rightarrow f'(۱)=\frac{۷+۳m-۱}{۱۶}=\frac{۳}{۴}$

۱ m ۱

۰ ۱ ۳

$۴y-۳x=n \Rightarrow ۴y=۳x+n \Rightarrow y=\frac{۳}{۴}x+n$ $f'(۱)=\frac{۳}{۴}$

$\Rightarrow ۱۲=۷+۳m-۱ \Rightarrow ۳m=۶ \quad m=۲]$ $f(۱)=\frac{۱+۲+۱}{۴}=۱]$ ۲

$f(۱)=۱$ $y=\frac{۳}{۴}x+\frac{n}{۴} \Rightarrow y=\frac{۳}{۴}\times۱+\frac{n}{۴}=۱ \Rightarrow n=۱$ $m+n=۲+۱=۳]$ ✓

---

④

$۳g'(\frac{۵\pi}{۳})-f'(\frac{۵\pi}{۳})=(۳g-f)'$ $\frac{۳\times۳}{۳+\sin x}-\frac{۲۷-\sin^۳x}{۹-\sin^۲x}=$

$\frac{۹}{۳+\sin x}-\frac{\cancel{(۳-\sin x)}(۹+\sin^۲x+۳\sin x)}{\cancel{(۳-\sin x)}(۳+\sin x)}=\frac{۹-۹-\sin^۲x-۳\sin x}{۳+\sin x}=-\frac{\sin x(\sin x+۳)}{۳+\sin x}=-\sin x$

۱٫۷۵

$(۳g-f)'=(-\sin x)'=-\cos x \Rightarrow (۳g-f)'(\frac{۵\pi}{۳})=-\cos\frac{۵\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}]$

دایره مثلثاتی : $-(\cos\frac{۵\pi}{۳})=-\frac{۱}{۲}$

---

⑤

$g'(\sqrt[۵]{۳})f'(g\sqrt[۵]{۳})=(f\circ g)'(x) \Rightarrow f\circ g(x)=\frac{-۱}{\sqrt[۵]{\frac{۱}{x^۵+|x^۵|}+\left|\frac{۱}{x^۵+|x^۵|}\right|}}$

۱٫۵

$\Rightarrow f\circ g(x)=\frac{-۱}{\frac{\sqrt[۵]{۲}}{\sqrt[۵]{۲x^۵}}}=\frac{-۱}{\frac{\sqrt[۵]{۲}}{x\sqrt[۵]{۲}}} \Rightarrow f\circ g(x)=-x^۵ \Rightarrow (f\circ g)'(\sqrt[۵]{۳})=$

$(f\circ g)'(x)=-۵x^۴ \Rightarrow f\circ g'(\sqrt[۵]{۳})=-۵\sqrt[۵]{۸۱}$

---

⑥

$f(x)=x\,g(x)+۱ \Rightarrow \frac{f(x)-۱}{x}=g(x) \Rightarrow g(x)=\frac{\frac{(\sin x-۱)^۲}{(\sin x+۱)^۲}-۱}{x} \Rightarrow$

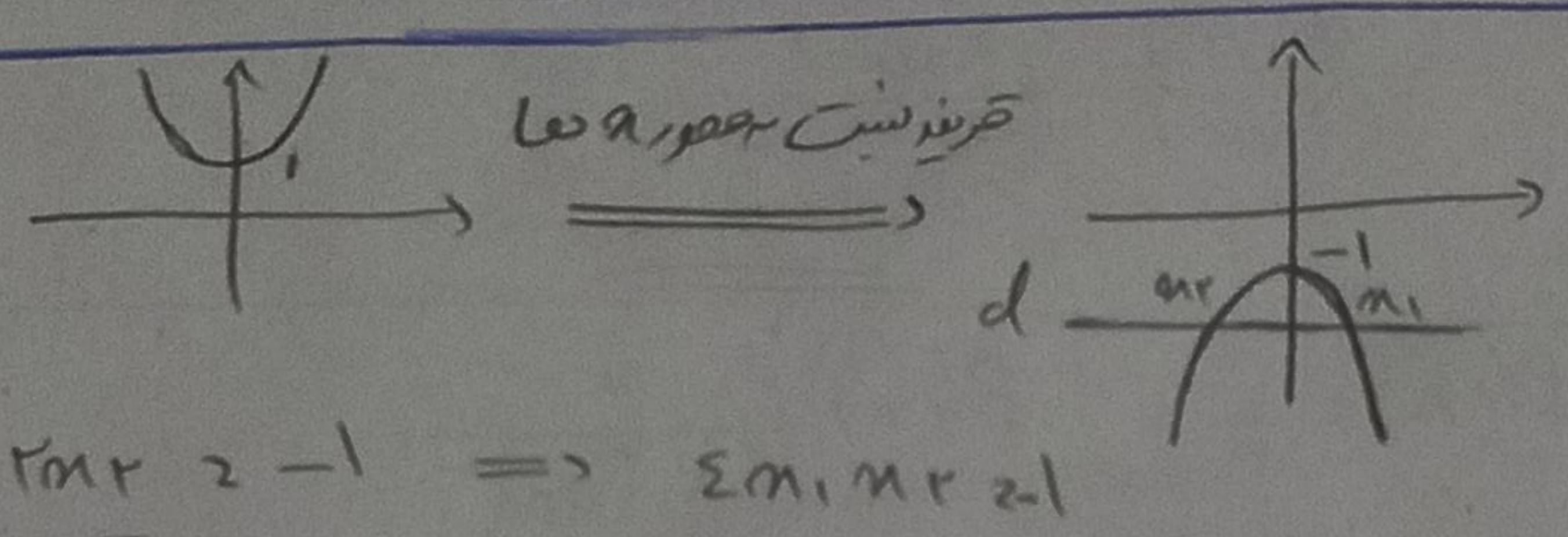
$g(x)=\frac{\sin^۲x+۱-۲\sin x-\sin^۲x-۱-۲\sin x}{x(\sin x+۱)^۲} \Rightarrow g(x)=\frac{-۴\sin x}{x(\sin x+۱)^۲}$ ۲

$\lim_{x\to۰} g(x)=\frac{-۴\sin x}{x}\times\frac{۱}{(\sin x+۱)^۲}=-۴\times\frac{۱}{۱}=-۴]$ ✓

کلاس ۳۴ علیرضا زادگان

⑦

$y = x^۲+۱$



$y = -x^۲-۱$

$y' = -۲x$

فاصله‌ی خط d از مبدأ برابر $\frac{۵}{۴}$ است

$-۲x_۱ \times -۲x_۲ = -۱ \Rightarrow ۴x_۱x_۲ = -۱$

$x_۱x_۲ = -\frac{۱}{۴}]$ $\quad x_۱+x_۲ = ۰ \Rightarrow x_۱ = -x_۲ \Rightarrow x_۱ = \frac{۱}{۲} \quad x_۲ = -\frac{۱}{۲}$ ✓

$f(\frac{۱}{۲}) = f(-\frac{۱}{۲}) = -(\frac{۱}{۲})^۲-۱ \Rightarrow f(\frac{۱}{۲}) = f(-\frac{۱}{۲}) = -\frac{۵}{۴}]$

۲

⑧

$d: mx \qquad f'(x) = \frac{۲}{۲\sqrt{x}}(۴x^۲+۳) + ۲\sqrt{x}\,(۸x)$

$\frac{f(a)-۰}{a-۰} = f'(a) \Rightarrow a f'(a) = f(a) \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a}}(۴a^۲+۳) + ۲\sqrt{a}\,(۸a) = ۲\sqrt{a}\,(۴a^۲+۳)$

$\sqrt{a}\,(۴a^۲+۳+۱۶a) = ۲\sqrt{a}\,(۴a^۲+۳) \Rightarrow a = \frac{۱}{۲} \Rightarrow f'(a) = m = f'(\frac{۱}{۲})$

شیب خط d برابر $۸\sqrt{۲}$ است.

$f'(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{۲}\,(۴) + \frac{۲}{\sqrt{۲}}(۴) = ۸\sqrt{۲}$ ✓

۲

⑨

$d = ax \qquad f'(x) = \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(-۲x^۲+x+۱) - \sqrt{x}\,(-۴x+۱)}{(-۲x^۲+x+۱)^۲} = a$ *

$A:(x,y)$

$ax = \frac{\sqrt{x}}{-۲x^۲+x+۱} \Rightarrow a\sqrt{x}\,(-۲x^۲+x+۱) = ۱$

* $\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(-۲x^۲+x+۱) - \sqrt{x}\,(-۴x+۱)}{(-۲x^۲+x+۱)^۲} \times \sqrt{x}\,(-۲x^۲+x+۱) = ۱ \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}(-۲x^۲+x+۱)+۴x^۲-x}{-۲x^۲+x+۱} = ۱$

$\Rightarrow -x^۲ + \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲} + ۴x^۲ - x = -۲x^۲+x+۱ \Rightarrow ۵x^۲ - \frac{۳}{۲}x - \frac{۱}{۲}$ $\quad x = \frac{۵}{۱۰}$

$x = -\frac{۲}{۱۰}$ ← در دامنه نیست

$x = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲} \qquad f(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{\sqrt{۲}\,(-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+۱)} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}]$ ✓

۵

⑩

$g'(x) = -\frac{۱}{۲}(۲x)(x^۲-۱)^{-\frac{۳}{۲}} \Rightarrow g'(x) = -x(x^۲-۱)^{-\frac{۳}{۲}}$

$g'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲}) = -\frac{\sqrt{۵}}{۲}(\frac{۵}{۴}-۱)^{-\frac{۳}{۲}} = -\frac{\sqrt{۵}}{۲} \times ۸ = -۴\sqrt{۵}]$

$g_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^- = \frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}} = \frac{۱}{\sqrt{\frac{۵}{۴}-۱}} = \frac{۱}{(\frac{۱}{۲})} = ۲^+ \qquad x \to ۲^+ \; [x] = ۲$

۱/۵

$f(x) = (۲x)^۳ = ۸x^۳$

$f'(x) = ۲۴x^۲$

$(fog)' = g'(x)\, f'(g(x))$

$(fog)'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲}) = -۴\sqrt{۵} \times ۲۴ \times ۴ = -۱۶ \times ۲۴\sqrt{۵}]$

$\frac{-۱۶ \times ۲۴\sqrt{۵}}{۴۸} = -۸\sqrt{۵}]$

۲

$m = \frac{۲-۱}{۲+۱} = \frac{۱}{۳} \leadsto f'(x) = \frac{a}{۲\sqrt{ax-۱}} = \frac{۱}{۳} \leadsto ۳a = ۲\sqrt{ax-۱}$

مماس $= y = \frac{۱}{۳}x + \frac{۴}{۳} \leadsto x+۴ = ۳\sqrt{ax-۱} \leadsto x+۴ = \frac{۳a}{۲}(۳) = \frac{۹a}{۲}$

$x = ۴٫۵a - ۴ \leadsto ۴٫۵a - ۴ + ۴ = ۳\sqrt{a(۴٫۵a-۴)-۱} \leadsto ۹a^۲ - ۱۶a - ۴ = ۰ \Rightarrow a = ۲ \checkmark$

یا $a = -\frac{۲}{۹} \times$

$f(۵) = \sqrt{۱۰-۱} = \sqrt{۹} = \boxed{۳}$

۴

$$۳g - f(x) = \frac{۹}{۳+\sin x} - \frac{(۳-\cancel{\sin x})(۹+\sin^۲ x+۳\sin x)}{(۳-\cancel{\sin x})(۳+\sin x)} = \frac{-\sin x(\cancel{\sin x+۳})}{\cancel{\sin x+۳}}$$

یا $-\sin x \xrightarrow{\text{مشتق}} (۳g-f)'(x) = -\cos x \leadsto -\cos(\frac{۵\pi}{۳}) = \boxed{-\frac{۱}{۲}}$

۵

$g'(x) \times f'(g(x)) = (fog)'(x)$

$x > ۰ \longrightarrow g(x) = \frac{۱}{۲x^۵} \longrightarrow f(x) = \frac{-۱}{\sqrt[۵]{۲x}} \leadsto fog(x) = \frac{-۱}{\sqrt[۵]{۲(\frac{۱}{۲x^۵})}}$

$fog(x) = -x \longrightarrow fog'(x) = \boxed{-۱} \leadsto fog'(\sqrt[۵]{۳}) = ۱$

۱۰

$g(x) = (x^۲-۱)^{-\frac{۱}{۲}} \longrightarrow g'(x) = -\frac{۱}{۲}(۲x)(x^۲-۱)^{-\frac{۳}{۲}}$

$g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲}) = -\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵})(\frac{۵}{۴}-۱)^{-\frac{۳}{۲}} \longrightarrow -\frac{\sqrt{۵}}{۲}(\underset{۸}{\cancel{۲^{-۲(-\frac{۳}{۲})}}}) = -۴\sqrt{۵}$

$g(\frac{\sqrt{۵}}{۲}^-) = \frac{۱}{\sqrt{\frac{۵^-}{۴}-۱}} = \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۴}^-}} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}^-} = ۲^+$

$f'(۲^+) = ((۲x)^۳)' = ۲۴x^۲ = ۲۴ \times ۴$

$fog'(\frac{\sqrt{۵}^-}{۲}) = -۴\sqrt{۵} \times ۲۴ \times ۴ \xrightarrow{\div -۴۸\sqrt{۵}} \frac{\overset{۲}{\cancel{۲۴}} \times \cancel{۴} \times -۴\sqrt{۵}}{-\cancel{۴۸}\sqrt{۵}} = \boxed{۸}$