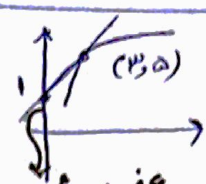
مطهره کمیلی «بحث مشتق» ۱۹ آذر

سوال ۱ ←



$f'(3)$ ← شیب خط مماس بر آن نقطه

عرض از مبدأ $\to 5 = 3a + 1 \quad \frac{4}{3} = a \quad f'(3) = \frac{4}{3}$

سوال ۲ ← ابتدا معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی A را پیدا می‌کنیم

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{شیب} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3} \to \frac{1}{3}\times -1 + b = 1$, $b = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ می‌دانیم خط و تابع مورد سوال فقط در ۱ نقطه برخورد دارند

$\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} = \sqrt{ax-1}$

$\hookrightarrow (x+4)^2 = 9(\sqrt{ax-1})^2 \to x^2+8x+16 = 9ax-9$

$x^2 + (8-9a)x + 25 = 0 \to \Delta = 0 \to (8-9a)^2 - 100 = 0$

$\Rightarrow 8-9a = 10 \to a = -\frac{2}{9} \to f(5)$ تعریف نشده $\times$

$8-9a = -10 \to a = 2 \to f(5) = \sqrt{5\times 2 - 1} = 3$

سوال ۳ ← ابتدا مشتق را پیدا می‌کنیم و مساوی با شیب خط قرار می‌دهیم

شیب در نقطه ۱ $= \frac{3}{4} = \frac{(2+m)(4) - (1)(1+m+1)}{16}$

$\to 3 = \frac{6+3a}{4} \to 1 = \frac{2+m}{4} \to m = 2$

از طرفی مقدار $m=1$ در هر ۲ معادله برابر است

$m = 1 \to y = \frac{1+2+1}{1+3} = 1 \Rightarrow 4\times 1 - 3\times 1 = n$, $n = 1$

$m + n = 2 + 1 = 3$

سوال ۴ ←

$f(x) = \frac{(3-\sin x)(9+\sin^2 x+3\sin x)}{(3-\sin x)(3+\sin x)}$

$3g'(\frac{5\pi}{3}) - f'(\frac{5\pi}{3}) = (3g(\frac{5\pi}{3}) - f(\frac{5\pi}{3}))'$

$= \frac{\cancel{9} - \cancel{9} - \sin^2 x - 3\sin x}{3+\sin x} = \frac{-\sin x(\sin x + 3)}{\sin x + 3}$

$(-\sin(\frac{5\pi}{3}))' = -\cos(\frac{5\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$

سوال ۵ ←

$g'(\sqrt[5]{3}) \cdot f'(g(\sqrt[5]{3})) = (f\circ g)'$

$f\circ g(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{2x^5} + \frac{1}{2x^5}}} = -\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{2}{2x^5}}}$

$= -\frac{1}{\frac{1}{x}} = -x \to y' = (-x)' = -1$

سوال ۶ ←

$\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^2 = x g(x) + 1$

$= \frac{\sin^2 x + 1 - 2\sin x}{(\sin^2 x + 1 + 2\sin x)} - 1 = x g(x)$

$\frac{\cancel{\sin^2 x} + \cancel{1} - 2\sin x - \cancel{\sin^2 x} - \cancel{1} - 2\sin x}{(\sin^2 x + 1 + 2\sin x)\times x} = g(x)$

$\frac{-4\sin x}{(\sin x + 1)^2 x} = g(x)$ $\lim_{x\to 0}$ از ۲ طرف   x به سمت ۰ ↳ $x \simeq \sin x$

$= \frac{-4\sin x}{(\sin x + 1)^2 \sin x} = -4$

سوال ۷ ← مماس‌های رسم شده بر روی تابع زوج قرار است

$f'(x_1) = a$ و $f'(x_2) = -a$

از طرفی برهم عمود هستند یعنی ۲ عدد هم قرینه و هم معکوس یکدیگر می‌باشند تنها اعدادی که این شرایط رو دارند ۱ و ۱- هستند

$\hookrightarrow y' = 2x = 1 \to x = \frac{1}{2} \to$ فاصله تا مبدأ $= \frac{5}{4}$

$y = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$ معادله خط $= y = \frac{5}{4}$

سوال ۸ ← $y = ax$ وقتی بر خود دارد مماس می‌شود که $y = \text{مشتق} \times x$

$\hookrightarrow (2\sqrt{x}(4x^2+3)) = \frac{1}{\sqrt{x}}(4x^2+3) + (8x)(2\sqrt{x})) \times \sqrt{x}$

$= 2x(4x^2+3) = (4x^2 + 3 + \frac{8x(4x)}{16x^2})\times x$

$-12x^3 + 3x = 0 \to x = 0 \ \times$, $x = \frac{1}{2} \to$ قابل قبول, $x = -\frac{1}{2} \ \times$

$\text{شیب} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1+3) + (4)\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right) = 8\sqrt{2}$

سوال ۹ ← همانند سوال قبل مشتق $y = x \times$

$\frac{\sqrt{x}}{-2x^2+x+1} = x \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(-2x^2+x+1) - (-4x+1)\right) / (-2x^2+x+1)^2$

۱٫۵

$\sqrt{x}(-2x^2+x+1) = \frac{x}{\sqrt{x}} \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(-2x^2+x+1) + 4x - 1\right)$

$-x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 4x\sqrt{x} - \sqrt{x}$

باید این معادله را حل کرده و جواب آن را در معادله‌ی اولیه گذاشت تا نقطه A به دست آید

۱/۵

سوال ۱۵ ← $\lim_{x \to \frac{\sqrt{5}}{2}^-} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) \uparrow = 2^+$ $= \cancel{2}$ $= \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-1}}$ $\xrightarrow{x=\frac{\sqrt{5}}{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

با کم شدن مقدار x ← x^2 کم می‌شود ← x^2-1 کم می‌شود ← مخرج کم می‌شود ← کل کسر زیاد می‌شود

$[x] = 2 \longrightarrow \left(\left(x[x]\right)^3\right)' = \left((2x)^3\right)' = 3 \times 8x^2 \xrightarrow{x=\frac{\sqrt{5}}{2}} \cancel{8}^{24} \times \frac{5}{4} = 30$

$\frac{6 \cdot 30 \sqrt{5}}{-\frac{48\sqrt{5}}{8}} = -\frac{\sqrt{5}}{8}$

۸

$f(x) = ۸x^{\frac{۵}{۲}} + ۶x^{\frac{۱}{۲}} \longrightarrow f'(x) = ۲۰\, x^{\frac{۳}{۲}} + ۳x^{-\frac{۱}{۲}}$

معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی $x = a$ برابر است با:

$y - ۲\sqrt{a}(۴a^۲+۳) = \dfrac{۲۰a^۲+۳}{\sqrt{a}}(x-a)$

$x,y = ۰ \rightsquigarrow \cancel{-}۲\sqrt{a}(۴a^۲+۳) = \dfrac{۲۰a^۲+۳}{\sqrt{a}}(\cancel{-}a) \rightsquigarrow ۲\cancel{a}(۴a^۲+۳) = ۲۰a^۲+۳(\cancel{a})$

$۸a^۲+۶ = ۲۰a^۲+۳ \longrightarrow ۱۲a^۲ = ۳ \longrightarrow \boxed{a = \pm\frac{۱}{۲}} \rightsquigarrow a>۰ \rightsquigarrow a = \frac{۱}{۲}$

$m = ۲۰(۲^{-۱\times\frac{۳}{۲}}) + ۳(۲^{-۱(-\frac{۱}{۲})}) = \boxed{۸\sqrt{۲}}$

۹

$y = mx \longrightarrow \dfrac{\sqrt{a}}{-۲a^۲+a+۱} = ma \longrightarrow \dfrac{۱}{-۲a^۲+a+۱} = m\sqrt{a}$

$m\sqrt{a}(-۲a^۲+a+۱) = ۱ \longrightarrow -۲m(a^{\frac{۵}{۲}}) + m(a^{\frac{۳}{۲}}) + m(a)^{\frac{۱}{۲}} = ۱ \xrightarrow{\text{مشتق}}$

$-۵m(a^{\frac{۳}{۲}}) + \frac{۳}{۲}m(a^{\frac{۱}{۲}}) + \frac{m}{۲}(a^{-\frac{۱}{۲}}) = ۰$

$\frac{m}{۲}(a^{-\frac{۱}{۲}})(-۱۰a^۲+۳a+۱) = ۰ \longrightarrow a = -\frac{۱}{۵}$ یا $a = \frac{۱}{۲}$ ✓ $(a>۰)$

$f(a) = \dfrac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{-۲(\frac{۱}{۴})+\frac{۱}{۲}+۱} = \dfrac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱} = \boxed{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$