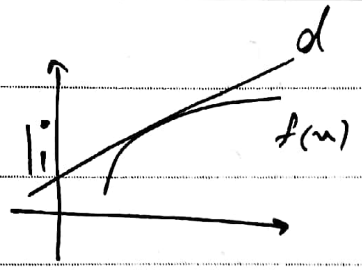


۱ـ $d: \begin{vmatrix} ۳ \\ ۵ \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} ۰ \\ ۱ \end{vmatrix}$

$m_d = \dfrac{۵-۱}{۳-۰} = \dfrac{۴}{۳}$

۲

خط مماس $d = \dfrac{۴}{۳}x + ۱ \longrightarrow f'(۳) = \dfrac{۴}{۳}$ جواب

۲ـ خط مماس بر منحنی در نقطه A از نقاط $\begin{vmatrix} -۱ \\ ۱ \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} ۲ \\ ۲ \end{vmatrix}$ می‌گذرد.

$f(x) = \sqrt{ax-۱}$

شیب خط مماس $= \dfrac{۲-۱}{۲-(-۱)} = \dfrac{۱}{۳}$ 　　 خط مماس $= \dfrac{۱}{۳}x + \dfrac{۴}{۳}$

$f'(x) = \dfrac{a}{۲\sqrt{ax-۱}} \longrightarrow$ به ازای $x = A$ این عبارت برابر با $\dfrac{۱}{۳}$ می‌شود.

$\longrightarrow \dfrac{a}{۲\sqrt{Aa-۱}} = \dfrac{۱}{۳}$

از طرفی در نقطه $x = A$ خط مماس و تابع اصلی یکدیگر را قطع می‌کنند.

$\dfrac{۱}{۳}x + \dfrac{۴}{۳} = \sqrt{ax-۱}$

$\downarrow$

$\dfrac{a}{۲\sqrt{Aa-۱}}(A) + \dfrac{۴}{۳} = \sqrt{aA-۱} \longrightarrow \dfrac{aA}{۲\sqrt{aA-۱}} + \dfrac{۴}{۳} = \sqrt{aA-۱}$

$aA = x$ در نظر می‌گیریم.

$\dfrac{x}{۲\sqrt{x-۱}} + \dfrac{۴}{۳} = \sqrt{x-۱} \longrightarrow \sqrt{x-۱} - \dfrac{x}{۲\sqrt{x-۱}} = \dfrac{۴}{۳}$

$\dfrac{۲x-۲-x}{۲\sqrt{x-۱}} = \dfrac{۴}{۳} \longrightarrow \dfrac{x-۲}{۲\sqrt{x-۱}} = \dfrac{۴}{۳}$ 　 $\to x = ۱۰$ 　 $\to \dfrac{۱۰}{۹}$

نیما ثبات

$aA = \frac{10}{9} \longrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{9} \\ A = 5 \end{cases}$ / $Aa = 10 \longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ A = 5 \end{cases}$

$\frac{a}{2\sqrt{Aa-1}} = \frac{1}{3} \longrightarrow$ از این رابطه ی قبل برای پیدا کردن a استفاده می کنیم

پس برای a دو مقدار وجود دارد که $f(5)$ در این صورت دارای ۲ جواب خواهد بود

$f(x) = \sqrt{2x-1}$

یا

$f(x) = \sqrt{\frac{2}{9}x - 1} \longrightarrow f(5) = \frac{1}{3}$ ، $f(5) = 3$

۳ـ معادله خط مماس در نقطه $x=1$

$y = \frac{x^2 + mx + 1}{x+3}$

$y = \frac{3}{4}x + \frac{n}{4}$

$y' = \frac{(2x+m)(x+3) - (x^2+mx+1)}{(x+3)^2} \longrightarrow y'\Big|_{1}^{\frac{3}{4}}$

$\frac{4(2+m) - (1+m+1)}{16} = \frac{3}{4} \longrightarrow 3m = 6 \longrightarrow \boxed{m = 2}$

معادله خط مماس $= \frac{3}{4}x + \frac{n}{4}$ تابع اصلی $\Big|_{1}^{1}$ $y'\Big|_{1}^{\frac{3}{4}}$

$y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x+3}$

معادله خط مماس $=$ $y - 1 = \frac{3}{4}(x-1)$

$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

$\boxed{n = 1}$

$m + n = 3$

جواب

گیتی بابی

۴ـ

$$f(x)=\frac{27-\sin^3 x}{9-\sin^2 x}=\frac{(3-\sin x)(9+\sin^2 x+3\sin x)}{(3-\sin x)(3+\sin x)}$$

$$f(x)=\frac{\sin^2 x+3\sin x+9}{3+\sin x} \quad / \quad g(x)=\frac{3}{3+\sin x}$$

$$3g'\left(\frac{5\pi}{3}\right)-f'\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\left(3g(x)-f(x)\right)'$$

$$\longrightarrow \frac{9}{3+\sin x}-\frac{\sin^2 x+3\sin x+9}{\sin x+3}=\frac{-\sin x\left(\cancel{\sin x+3}\right)}{\cancel{\sin x+3}}$$

$$=\left(-\sin x\right)'=-\cos x=-\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{-1}{2}$$

جواب

۲

۵ـ

$$f(x)=\frac{-1}{\sqrt[5]{x+|x|}}=\frac{-1}{\sqrt[5]{2x}}$$

$$g(x)=\frac{1}{|x^5|+x^5}=\frac{1}{2x^5}$$

$$g'(\sqrt[5]{3})\times f'(g(\sqrt[5]{3}))=(f\circ g)'(\sqrt[5]{3})$$

$$f\circ g=\frac{-1}{\sqrt[5]{\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}x^5}\right)}}=-x\longrightarrow(-x)'=-1$$

جواب

۲

نیکا ب

۶ـ

$$f(x) = \left(\frac{\lim x - 1}{\lim x + 1}\right)^2 \qquad f(x) = x\,g(x) + 1$$

$$g(x) = \frac{f(x) - 1}{x}$$

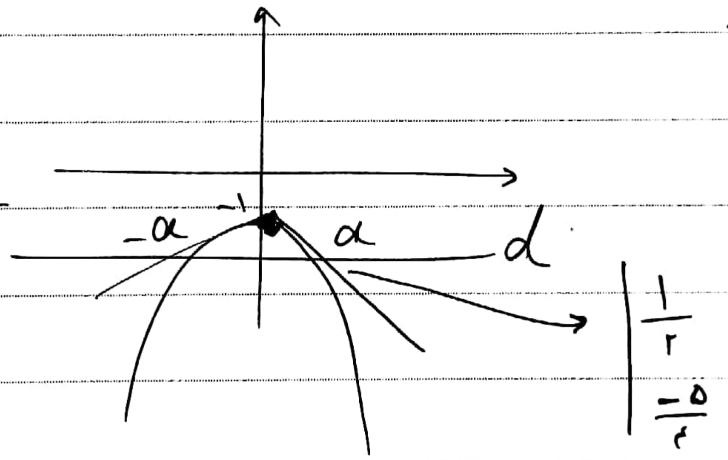
$\lim\limits_{x \to 0} g(x) \longrightarrow$ آن در ازای $x \to 0$ به صفر میل می‌کند و می‌توان از هم ارزی استفاده کرد

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \longrightarrow \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - 1}{x}$$

$$\xrightarrow{hop} \lim_{x \to 0} \frac{2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left(\frac{2}{(x+1)^2}\right)}{1} = -4$$ جواب

۷ـ

$$f(x) = -x^2 - 1$$



دو نیم مماس بر هم عمودند ← به $f'(a)\,f'(-a) = -1$

$$f'(x) = -2x$$

$$(-2\alpha)(2\alpha) = -1 \longrightarrow \alpha^2 = \frac{1}{4} \longrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

بر اساس $a = \frac{1}{2}$ در تابع $f(x) = -x^2 - 1$ ، عرض نقطه $\frac{-5}{4}$ می‌باشد که همان فاصله خط d از مبدأ مختصات است.

جواب $\longrightarrow \frac{-5}{4}$

نیکو رابت

۱۰_ $f(x) = (x[x])^3 \qquad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(fog)'(\frac{\sqrt{5}}{2}^+)$

$(fog)' = f'(\underbrace{g(\frac{\sqrt{5}}{2}^+)}_{2^+}) \times g'(\frac{\sqrt{5}}{2}^+)$

$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \longrightarrow g(\frac{\sqrt{5}}{2}^+) = 2^+$

$f(x) = (x[x])^3 \longrightarrow$ برای $x>2$ باید بازنویسی کنیم

$f(x) = (2x)^3 = 8x^3 \qquad [x]=2$

$\boxed{f'(x) = 24x^2} \longrightarrow f'(2) = 96$

$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \longrightarrow g'(x) = \dfrac{-x}{(x^2-1)(\sqrt{x^2-1})}$

$\boxed{g'(\frac{\sqrt{5}}{2}) = -4\sqrt{5}}$

$(fog)' = f'(2) \times g'(\frac{\sqrt{5}}{2}) = 96 \times -4\sqrt{5}$

$\dfrac{\overset{2}{\cancel{96}} \times -4\sqrt{5}}{-\underset{1}{\cancel{48}}\sqrt{5}} \neq \frac{8}{2}$ ۸ برابر میشود

سوالات $\frac{8}{2}$ و $\frac{9}{2}$ را ننوشته ام

SiDO

$$f(x) = 8x^{\frac{5}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} \longrightarrow f'(x) = 20x^{\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}}$$ ۸

معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی $x=a$ برابر است با:

$$y - 2\sqrt{a}(4a^2+3) = \frac{20a^2+3}{\sqrt{a}}(x-a)$$

$$x,y=0 \rightsquigarrow \cancel{-}2\sqrt{a}(4a^2+3) = \frac{20a^2+3}{\sqrt{a}}(\cancel{-}a) \rightsquigarrow 2\cancel{a}(4a^2+3) = 20a^2+3(\cancel{a})$$

$$8a^2+6 = 20a^2+3 \longrightarrow 12a^2 = 3 \longrightarrow \boxed{a = \pm\frac{1}{2}} \rightsquigarrow a>0 \rightsquigarrow a = \frac{1}{2}$$

$$m = 20\left(2^{-1\times\frac{3}{2}}\right) + 3\left(2^{-1(-\frac{1}{2})}\right) = \boxed{8\sqrt{2}}$$

$$y = mx \longrightarrow \frac{\sqrt{a}}{-2a^2+a+1} = ma \longrightarrow \frac{1}{-2a^2+a+1} = m\sqrt{a}$$ ۹

$$m\sqrt{a}(-2a^2+a+1) = 1 \longrightarrow -2m(a^{\frac{5}{2}}) + m(a^{\frac{3}{2}}) + m(a)^{\frac{1}{2}} = 1 \xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$-5m(a^{\frac{3}{2}}) + \frac{3}{2}m(a^{\frac{1}{2}}) + \frac{m}{2}(a^{-\frac{1}{2}}) = 0$$

$$\frac{m}{2}(a^{-\frac{1}{2}})(-10a^2+3a+1) = 0 \longrightarrow a = -\frac{1}{5} \text{ یا } a = \frac{1}{2} \checkmark \quad (a>0)$$

$$f(a) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-2(\frac{1}{4})+\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$