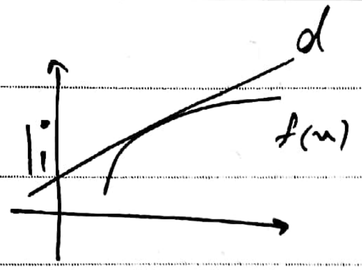
تکلیف شماره ۲۴ مشتقات

۱ـ



$d: \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

$$m_d = \frac{5-1}{3-0} = \frac{4}{3}$$

جواب $\frac{4}{3}$ $= f'(3) \longrightarrow$ خط مماس $d = \frac{4}{3}x + 1$

$$d\ \text{خط مماس} = \frac{4}{3}x+1 \longrightarrow f'(3) = \frac{4}{3}$$

۲ـ خط مماس بر منحنی در نقطه A از نقاط $\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix}$ می‌گذرد.

$$f(x) = \sqrt{ax-1}$$

$$\text{شیب خط مماس} = \frac{2-1}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$$

$$\text{خط مماس} = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax-1}} \longrightarrow$$

به ازای $x=A$ این عبارت برابر با $\frac{1}{3}$ می‌شود.

$$\longrightarrow \frac{a}{2\sqrt{Aa-1}} = \frac{1}{3}$$

از طرفی در نقطه $x=A$ خط مماس و تابع اصلی یکدیگر را قطع می‌کنند.

$$\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} = \sqrt{ax-1}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{a}{2\sqrt{Aa-1}}(A) + \frac{4}{3} = \sqrt{aA-1} \longrightarrow \frac{aA}{2\sqrt{aA-1}} + \frac{4}{3} = \sqrt{aA-1}$$

$aA = X$ در نظر می‌گیریم.

$$\frac{X}{2\sqrt{x-1}} + \frac{4}{3} = \sqrt{x-1} \longrightarrow \sqrt{x-1} - \frac{x}{2\sqrt{x-1}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2x-2-x}{2\sqrt{x-1}} = \frac{4}{3} \longrightarrow \frac{x-2}{2\sqrt{x-1}} = \frac{4}{3} \begin{cases} x=10 \\ \frac{10}{9} \end{cases}$$

نیکا ثابت

$aA = \frac{10}{9} \longrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{9} \\ A = 5 \end{cases}$ / $Aa = 10 \longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ A = 5 \end{cases}$

$\frac{a}{2\sqrt{Aa-1}} = \frac{1}{3} \longrightarrow$ از این رابطه ی سوال قبل برای پیدا کردن a استفاده می کنیم

پس برای a دو مقدار وجود دارد که f(5) در این صورت دارای ۲ جواب خواهد بود

$f(x) = \sqrt{2x-1}$

یا

$f(x) = \sqrt{\frac{2}{9}x-1} \longrightarrow f(5) = \frac{1}{3}$ $\quad f(5) = 3$

۳ـ معادله خط مماس در نقطه $x=1$

$y = \frac{x^2+mx+1}{x+3}$

$y = \frac{3}{4}x + \frac{n}{4}$

$y' = \frac{(2x+m)(x+3) - (x^2+mx+1)}{(x+3)^2} \longrightarrow y'\Big|_{\frac{3}{4}}^{1}$

$\frac{4(2+m) - (1+m+1)}{16} = \frac{3}{4} \longrightarrow 3m = 6 \longrightarrow \boxed{m = 2}$

معادله خط مماس $= \frac{3}{4}x + \frac{n}{4}$ $\quad$ تابع اصلی $\Big|_{1}^{1}$ $\quad y'\Big|_{\frac{3}{4}}^{1}$

$y = \frac{x^2+2x+1}{x+3}$

معادله خط مماس $= y - 1 = \frac{3}{4}(x-1)$

$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

$m + n = 3$ $\quad \boxed{n = 1}$

جواب

[illegible]

۴ـ $f(x) = \dfrac{27 - \sin^3 x}{9 - \sin^2 x} = \dfrac{(3 - \sin x)(9 + \sin^2 x + 3\sin x)}{(3 - \sin x)(3 + \sin x)}$

$f(x) = \dfrac{\sin^2 x + 3\sin x + 9}{3 + \sin x}$ / $g(x) = \dfrac{3}{3 + \sin x}$

$3g'\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) - f'\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) = \left(3g(x) - f(x)\right)'$

$\longrightarrow \dfrac{9}{3 + \sin x} - \dfrac{\sin^2 x + 3\sin x + 9}{\sin x + 3} = \dfrac{-\sin x\,\cancel{(\sin x + 3)}}{\cancel{\sin x + 3}}$

$= \left(-\sin x\right)' = -\cos x = -\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) = \dfrac{-1}{2}$

جواب

۵ـ $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt[5]{x + |x|}} = \dfrac{-1}{\sqrt[5]{2x}}$

$g(x) = \dfrac{1}{|x^5| + x^5} = \dfrac{1}{2x^5}$

$g'(\sqrt[5]{3}) \times f'(g(\sqrt[5]{3})) = (f\circ g)'(\sqrt[5]{3})$

$f\circ g = \dfrac{-1}{\sqrt[5]{\cancel{2}\left(\dfrac{1}{\cancel{2}x^5}\right)}} = -x \longrightarrow (-x)' = -1$

جواب

$f(x) = \left(\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right)^2 \qquad f(x) = x\,g(x) + 1$ — ۶

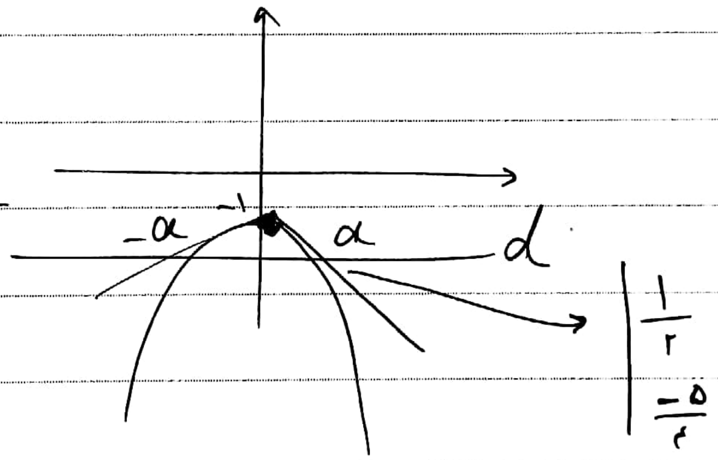
$g(x) = \frac{f(x) - 1}{x}$

$\lim_{x \to 0} g(x) \longrightarrow$ چون در ازای $x \to 0$ به صفر میل می‌کند و می‌توان از هم ارزی استفاده کرد

$f'(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \longrightarrow \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - 1}{x}$

$\xrightarrow{hop} \lim_{x \to 0} \frac{2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left(\frac{2}{(x+1)^2}\right)}{1} = -4$ جواب

$f(x) = -x^2 - 1$ — ۷



دو نیم‌مماس بر هم عمودند ⟵

$f'(\alpha) f'(-\alpha) = -1$ به

$f'(x) = -2x$

$(-2\alpha)(2\alpha) = -1 \longrightarrow \alpha^2 = \frac{1}{4} \longrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

به ازای $x = \frac{1}{2}$ در تابع $f(x) = -x^2 - 1$ عرض نقطه $-\frac{5}{4}$ می‌باشد که همان فاصله خط d از مبدأ مختصات است.

جواب $\longrightarrow \frac{5}{4}$

کیمیا بابت

۱۵ـ $f(x) = (x[x])^{۳} \qquad g(x) = \frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}}$

$(fog)'(\frac{\sqrt{۵}}{۲}^{+})$

$(fog)' = f'(\underbrace{g(\frac{\sqrt{۵}}{۲}^{+})}_{۲^{+}}) \times g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲}^{+})$

$g(x) = \frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}} \longrightarrow g(\frac{\sqrt{۵}}{۲}^{+}) = ۲^{+}$

$f(x) = (x[x])^{۳} \longrightarrow$ برای $x>۲$ باید بازنویسی کنیم

$f(x) = (۲x)^{۳} = ۸x^{۳} \qquad [x] = ۲$

$\boxed{f'(x) = ۲۴x^{۲}} \longrightarrow f'(۲) = ۹۶$

$g(x) = \frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}} \longrightarrow g'(x) = \frac{-x}{(x^{۲}-۱)(\sqrt{x^{۲}-۱})}$

$\boxed{g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲}) = -۴\sqrt{۵}}$

$(fog)' = f'(۲) \times g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲}) = ۹۶ \times -۴\sqrt{۵}$

$\frac{\cancel{۹۶}^{۲} \times -۴\sqrt{۵}}{-\cancel{۴۸}_{۱}\sqrt{۵}} = ۸$ ۸ برابر شود

سوالات ۸ و ۹ را ننوشته ام