صبا وفازاده تکلیف شماره ۲۴ دوازدهم دختر B

(۱
$f(3)=5 \quad d: y=ax+1 \quad f'(3)=a \quad 3a+1=5 \rightarrow a=\frac{4}{3} \quad f'(3)=\frac{4}{3}$

(۲
$a=\frac{2-1}{2-(-1)}=\frac{1}{3} \quad d: y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3} \quad \frac{1}{3}x+\frac{4}{3}=\sqrt{ax-1} \quad \frac{1}{9}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{16}{9}=ax-1 \xrightarrow{\times 9} x^2+8x+16=9ax-9$

$x^2+(8-9a)x+25=0 \quad \Delta=0 \rightarrow \begin{cases} a=-\frac{2}{9} \longrightarrow \text{غ ق ق چون } f(5) \text{ زیر رادیکال را منفی می‌کند} \\ a=2 \longrightarrow f(5)=\sqrt{2(5)-1}=3 \checkmark \end{cases} \quad \boxed{f(5)=3}$

(۳
$4y-3x=n \rightarrow a=\frac{3}{4} \quad f'(1)=\frac{3}{4} \quad f'(x)=\frac{x^2+6x+3m-1}{(x+3)^2} \rightarrow f'(1)=\frac{6+3m}{16} \quad \frac{3m+6}{16}=\frac{3}{4}$

$m=2 \quad f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+3} \rightarrow f(1)=1 \quad 4(1)-3(1)=n \quad n=1 \quad m+n=2+1=3$

(۴
$3g(x)-f(x)=\frac{9}{3+\sin x}-\frac{27-\sin^3 x}{9-\sin^2 x}=\frac{27-9\sin x-27+\sin^3 x}{9-\sin^2 x}=\frac{\sin^3 x-9\sin x}{9-\sin^2 x}=\frac{\sin x(\sin^2 x-9)}{9-\sin^2 x}$

$=-\sin x \quad 3g'(x)-f'(x)=-\cos x \quad 3g'(\frac{5\pi}{3})-f'(\frac{5\pi}{3})=-\cos\frac{5\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

(۵
$x>0 \rightarrow fog(x)=f(\frac{1}{2x^5})=-\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{2x^5}+\left|\frac{1}{2x^5}\right|}}=-\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}}}=-\frac{1}{\frac{1}{x}}=-x \quad (fog)'(x)=-1 \rightarrow (fog)'(\sqrt[5]{3})=-1$

(۶
$g(x)=\frac{f(x)-1}{x} \quad \lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} \xrightarrow{f(0)=1} f'(0) \quad f(0)=2\times(-1)\times 2=-4$

$f'(x)=2\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)\left(\frac{\cos x(1+\sin x)-(-1+\sin x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}\right)=2\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)\left(\frac{2\cos x}{(1+\sin x)^2}\right)$

(۷
$y=x^2+1 \xrightarrow[\text{محور } x]{\text{قرینه نسبت به}} y=-(x^2+1) \quad y'=-2x$

خط d منحنی را در xهای قرینه قطع می‌کند پس شیب در آن نقاط $2a$ و $-2a$ است.

$\text{عمود} \rightarrow mm'=-1 \quad 2a(-2a)=-1 \quad -4a^2=-1 \quad a=\pm\frac{1}{2} \quad f(\frac{1}{2})=f(-\frac{1}{2})=-(\frac{1}{4}+1)=-\frac{5}{4}$

$d: y=-\frac{5}{4} \longrightarrow$ فاصله خط d از مبدأ مختصات $=\frac{5}{4}$

(۸
$f(x)=8x^{\frac{5}{2}}+6x^{\frac{1}{2}} \quad f'(x)=20x^{\frac{3}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}} \quad d: y=ax \quad f'(x)=a \quad 8x^{\frac{5}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}=20x^{\frac{3}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}(x)$

$8x^{\frac{5}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}=20x^{\frac{5}{2}}+3x^{\frac{1}{2}} \quad 20x^{\frac{5}{2}}-8x^{\frac{5}{2}}=6x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{2}} \quad 4x^{\frac{5}{2}}(5-2)=3x^{\frac{1}{2}}(2-1) \quad 12x^{\frac{5}{2}}=3x^{\frac{1}{2}}$

$4x^{\frac{5}{2}}=x^{\frac{1}{2}} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 4x^2=1 \rightarrow x=\pm\frac{1}{2} \xrightarrow{D_f=[0,+\infty)} x=\frac{1}{2} \end{cases} \quad f'(x)=20\sqrt{x^3}+\frac{3}{\sqrt{x}} \rightarrow f'(\frac{1}{2})=5\sqrt{2}+3\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

(۹
نقطه A هم در خط صدق می‌کند و هم منحنی که مختصات آن را $\left|\begin{matrix} x \\ ax \end{matrix}\right.$ در نظر می‌گیریم.

$f(x)=ax=\frac{\sqrt{x}}{-2x^2+x+1}$

$a\sqrt{x}=\frac{1}{-2x^2+x+1} \quad -2ax^{\frac{5}{2}}+ax^{\frac{3}{2}}+ax^{\frac{1}{2}}=1 \quad -2ax^{\frac{5}{2}}+ax^{\frac{3}{2}}+ax^{\frac{1}{2}}-1=0 \xrightarrow{\text{مشتق}} -5ax^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}ax^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}}=0$

$-5a\sqrt{x^3}+\frac{3}{2}a\sqrt{x}+\frac{a}{2\sqrt{x}}=0 \longrightarrow -10ax^2+3ax+a=0 \quad \Delta=0 \longrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{5} \text{ غ ق ق در دامنه نیست} \\ x=\frac{1}{2} \rightarrow f(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

(۱۰
$(fog)'(\frac{\sqrt{5}}{2})=g'(\frac{\sqrt{5}}{2})\cdot f'(g(\frac{\sqrt{5}}{2})) \quad g(x)=(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow g'(x)=-\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}(2x) \quad g'(\frac{\sqrt{5}}{2})=-4\sqrt{5}$

$g(\frac{\sqrt{5}}{2})=2^+ \quad f(2^+)=(2x)^3=8x^3 \quad f'(2^+)=24x^2=96 \quad \frac{96(-4\sqrt{5})}{-48\sqrt{5}}=8$