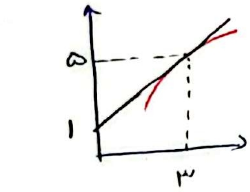
نام و نام خانوادگی ......مریم معصومی...... **پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره** ...۲۴... **کلاس** ...دوازدهم ریاضی......

۲۰ آفرین خیلی عالی نوشتی!

۱

$f'(۳) = ?$

نقطه (۳و۵) و (۰و۱) با توجه به نمودار در تابع f صدق می کند پس می توانیم شیب خط مماس بر f را پیدا کنیم یعنی $f'(x) \leftarrow$



$m = \frac{۵-۱}{۳-۰} = \boxed{\frac{۴}{۳}} \rightarrow$

$f'(۳) = \frac{۴}{۳}$ ✓ ②

۲

$f(x) = \sqrt{ax-۱}$ $(-۱و۱)$ $(۲و۲)$ $f(۵) = ?$

ابتدا معادله خطی که از دو نقطه می گذرد را بدست می آوریم $\frac{۲-۱}{۲-(-۱)} = \frac{۱}{۳} \rightarrow y-۱ = \frac{۱}{۳}(x+۱)$ ②

$y = \frac{x+۴}{۳}$ چون این خط بر f مماس است پس نقطه تلاقی آنها ریشه مضاعف دارد

$f(۵) = \sqrt{۲x-۱} = \sqrt{۹} = \boxed{۳}$ ✓

زیر رادیکال به ازای f(۵) منفی میشه غ ق ق

$\sqrt{ax-۱} = \frac{x+۴}{۳} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ax-۱ = \frac{(x+۴)^۲}{۹} \rightarrow ۹ax-۹ = x^۲+۸x+۱۶$

$x^۲ + (۸-۹a)x + ۲۵ = ۰ \xrightarrow{\Delta=۰} (۸-۹a)^۲ = ۴\times۲۵ \rightarrow ۸-۹a = ۱۰ \rightarrow ۹a = -۲ \rightarrow a = -\frac{۲}{۹}$

$۸-۹a = -۱۰ \rightarrow ۹a = ۱۸ \rightarrow \boxed{a = ۲}$

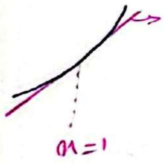
۳

جواب

$y = \frac{x^۲ + mx + ۱}{x+۳} = f(x)$ $y = \frac{۳}{۴}x + \frac{n}{۴} \rightarrow g(x)$

② $f(۱) = g(۱)$

① $f'(۱) = g'(۱)$



① $\rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{(۲+m)۴ - (۲+m)}{(۱+۳)^۲} = \frac{۳}{۴} \rightarrow \frac{\cancel{۳}(۲+m)}{\cancel{۱۶}\,۴} = \frac{\cancel{۳}}{\cancel{۴}} \rightarrow ۲+m = ۴$

$m = ۲$ ✓

② $\rightarrow \cancel{۴}\ \frac{۱+۲+۱}{۱+۳} = \frac{۳}{۴} + \frac{n}{۴} \rightarrow \frac{۴}{۴} = \frac{۳}{۴} + \frac{n}{۴}$ ✓ $\rightarrow \boxed{n = ۱}$

$m+n = ۲+۱ = ۳$ ✓ ②

۴

$f(x) = \frac{۲۷ - \sin^۳ x}{۹ - \sin^۲ x} = \frac{\cancel{(۳-\sin x)}(۹+\sin^۲ x+۳\sin x)}{\cancel{(۳-\sin x)}(۳+\sin x)} = \frac{\sin^۲ x + ۳\sin x + ۹}{۳+\sin x}$

$۳g'(\frac{۵\pi}{۳}) - f'(\frac{۵\pi}{۳}) = (۳g - f)'(\frac{۵\pi}{۳}) = \frac{۹}{۳+\sin x} - \frac{\sin^۲ x + ۳\sin x + ۹}{۳+\sin x}$

$\frac{-\sin x(\cancel{\sin x+۳})}{\cancel{۳+\sin x}} = -\sin x \xrightarrow{\text{مشتق می گیریم}} -\cos x \rightarrow -\cos\frac{۵\pi}{۳} = \boxed{-\frac{۱}{۲}}$ ✓ ②

۵

$f(x) = -\frac{۱}{\sqrt[۵]{x+|x|}}$ $g(x) = \frac{۱}{x^۵+|x^۵|}$ $g'(x) . f'(g(\sqrt[۵]{۳})) = (fog)'(x)$

$\xrightarrow{x>۰}$ $f(x) = \frac{-۱}{\sqrt[۵]{۲x}}$ $g(x) = \frac{۱}{۲x^۵} \rightarrow fog(x) = \frac{-۱}{\sqrt[۵]{\cancel{۲}\ \frac{۱}{\cancel{۲}x^۵}}} = -x$

$(fog)'(x) = -۱ \rightarrow (fog)'(\sqrt[۵]{۳}) = -۱$ ✓ ②

۶

$f(x) = \left(\frac{\sin x - 1}{1+\sin x}\right)^2 \qquad g(x) = \frac{f(x)-1}{x}$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin x-1}{1+\sin x}\right)^2 - 1}{x} \xrightarrow[\text{Hop}]{0/0} \lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{\sin x-1}{1+\sin x}\right)^1\left(\frac{2\cos x}{(1+\sin x)^2}\right)}{1}$$

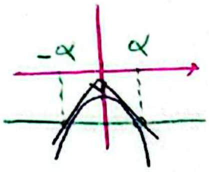
$$= 2\left(\frac{0-1}{1+0}\right)\left(\frac{2}{(1+0)^2}\right) = \boxed{-4}$$

②

۷

$y=x^2+1 \xrightarrow[x]{\text{قرینه به محور}} y=-x^2-1 \qquad f'(x)=-2x$

$f'(\alpha)\cdot f'(-\alpha)=-1 \longrightarrow -2\alpha\times 2\alpha=-1 \to \alpha^2=\frac{1}{4} \to \alpha=\frac{1}{2}$



در تابع قرار می‌دهیم $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ یا $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ → فاصله از مبدا مختصات

عرض خط d برابر عرض نقاط یعنی نقطه $-\frac{5}{4}$ است

پس فاصله‌ی خط d از مبدا مختصات برابر $\frac{5}{4}$ است.

②

۸

خط d ← $y=mx$ (مبداگذر است) $= g(x)$

① $f(x)=g(x)$

② $f'(x)=g'(x)$

$f(x)=2\sqrt{x}\,(4x^2+3)$

① $2\sqrt{x}(4x^2+3)=mx$

$\to 8x^{\frac{5}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}=mx$

$\xrightarrow{②} f'(x)=20x^{\frac{3}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}=m=g'(x) \xrightarrow{\times x} 20x^{\frac{5}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}$ ②

$\xrightarrow{①,②}$ ~~$2\sqrt{x}(4x^2+3)$~~ $8x^{\frac{5}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}=20x^{\frac{5}{2}}+3x^{\frac{1}{2}} \to 12x^{\frac{5}{2}}=3x^{\frac{1}{2}} \to 4x^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{1}{2}}=0$

با توجه به دامنه تابع و مشتق $x\neq 0$ و $x\neq -\frac{1}{2}$ پس $x=\frac{1}{2}$

$\sqrt{x}\,(4x^2-1)=0 \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\frac{1}{2} \end{array}\right. \to 20\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+3\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 20\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

۹

خط d مبداگذر ← $y=ax$

چون d و f در نقطه A مماس هستند شیب آنها در این نقطه برابر است و عرض آنها در A یکسان است

$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{-2x^2+x+1} \xrightarrow{\sqrt{x}=t} \frac{t}{-2t^4+t^2+1}=at^2$

$-2at^5+at^3+at-1=0$

مشتق می‌گیریم $\quad -10at^4+3at^2+a=0 \qquad -a(10t^4-3t^2-1)=0$

$-a(t^4-3t^2-10)=0 \left\langle \begin{array}{l} t^2=\frac{5}{10}=\frac{1}{2} \;✱\; t^2=x \to x=\frac{1}{2} \\ t^2=\frac{-2}{10} \to \text{غ ق ق} \end{array}\right.$

$(t^2-5)(t^2+2)$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{2}{4}+\frac{1}{2}+1}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

②

۱۰

$f(x)=(x[x])^3 \qquad g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (f\circ g)'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot f'\left(g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)$

$g(x)=(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{مشتق}} g'(x)=-\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\times 2x \to g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}\times\sqrt{5}=-4\sqrt{5}$

$x\to\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^- \to g(x)=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^-}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^-}=2^+$ باید از تابع f به ازای $x\to 2^+$ مشتق بگیریم

$x\to 2^+ = [2^+]=2 \to f(x)=(2x)^3=8x^3 \to f'(x)=24x^2 \to f'(2^+)=24\times 4$

$f'\left(g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)\times g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=24\times 4\times(-4\sqrt{5})=8(-48\sqrt{5})$ ② ۸ برابر