۱۸٫۵

سوال ۱ (۱٫۵)

$f(x) = 1 - \frac{a}{x}$ در بازه‌ی $[3, 1]$ قرار ندارد $\Rightarrow x = -\sqrt{3}$

پس $x = \sqrt{3}$ تنها قابل قبول است!

$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \rightarrow \frac{1 - \frac{a}{3} - 1 + a}{2} = \frac{\frac{2a}{3}}{2} = \frac{a}{3}$ (۱) شرط بازه $(1,3)$

$\frac{a}{3} = \frac{a}{x^2} \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$ صحیح $\rightarrow$ آهنگ تغییر

سوال ۲ (۲)

$y = 2ax^2 - 6x + 18a$

$y = x$ خط زاویه اول و سوم

$2ax^2 - 6x + 18a = x \rightarrow 2ax^2 - 7x + 18a = 0$ (۲)

$\Delta = 0$ تکرار $\rightarrow 49 - 144a^2 = 0 \rightarrow a = \pm\frac{7}{12}$

$a = -\frac{7}{12}$ ، $a = \frac{7}{12}$ قابل قبول

سوال ۳ (۲)

$y = x^3 - 12x + 2$

$y' = 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = \pm 2$ صحیح $\rightarrow$ $y = -14$ min

$x = 2 \rightarrow -16 + 2 = -14$ min

$x = -2 \rightarrow -8 + 24 + 2 = 18$ max

$\min \begin{bmatrix} 2 \\ -14 \end{bmatrix}$ (۲)

سوال ۴ (۲)

$y = x^3 + ax^2 - bx + 2$

$3x^2 + 2ax - b = 0$ $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow -b = 0 \rightarrow b = 0$

$x = -2 \rightarrow 12 - 4a = 0 \rightarrow a = 3$

$y = x^3 + 3x^2 - 2$ $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow y = -2$

$x = -2 \rightarrow y = -8 + 12 + 2 = 6$ (۲)

$[-2, 6]$ $[0, -2]$

فاصله $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \rightarrow \sqrt{(4+5)^2 + (6+2)^2}$

$= \sqrt{81 + 64} = \sqrt{145}$ (۲)

سوال ۴

$y = x^2 - 2|x| - 3$

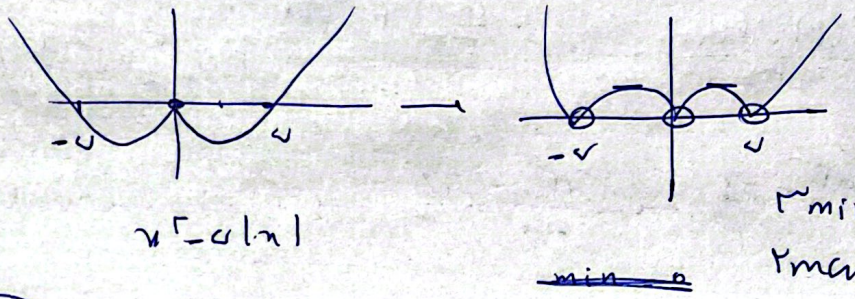
$x \geq 0$: $x^2 - 2x - 3$ (min)

$x < 0$: $x^2 + 2x - 3$ (max)

$|x^2 - 2|x| - 3|$

m max

n min



$|x^2 - 2|x| - 3|$

$m_{max} = 3$

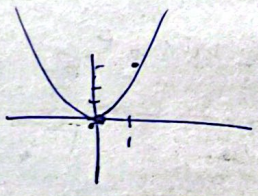
$n_{min} = 0$

$\frac{m}{n}$ → $\frac{3}{0}$ ✓ ۲

سوال ۵

$|x(|x| + 2)|$ → $|x^2 + 2x|$ $x \geq 0$

$|x^2 + 2x - 4|$ $x < 0$



$|x^2 + 2x|$ $x = 0$ $x = -2$

$\int_{-2}^{0} |x(x+2)| dx$

$\int_{-2}^{0} |x(-x-2)| dx$

تعداد نقاط بحرانی = ۲ ✓ ۲

سوال ۶

$f(x) = \sqrt{x^2 |x - a|}$

$\int_0^1 |x - a| \sqrt{x} \, dx$

$\int_0^a (a - x)\sqrt{x} \, dx + \int_a^1 (x - a)\sqrt{x} \, dx$

$= \int_0^a (a\sqrt{x} - x\sqrt{x}) dx + \int_a^1 (x\sqrt{x} - a\sqrt{x}) dx$

$= \left[\frac{2}{3}ax\sqrt{x} - \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right]_0^a + \left[\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{2}{3}ax\sqrt{x}\right]_a^1$

$= \frac{2}{3}a^2\sqrt{a} - \frac{2}{5}a^2\sqrt{a} + \frac{2}{5} - \frac{2}{3}a - \frac{2}{5}a^2\sqrt{a} + \frac{2}{3}a\sqrt{a}$

$= \frac{4}{15}a\sqrt{a} - \frac{4}{5}a^2\sqrt{a} - \frac{2}{3}a + \frac{2}{5}$

$= \frac{2}{15}\sqrt{a}(2 - 6a\sqrt{a}) + \frac{2}{5}$

$\frac{2}{15}\sqrt{a}(2 - 6a\sqrt{a}) = 0 \Rightarrow 2 - 6a\sqrt{a} = 0$

$\sqrt{a} = \frac{1}{3a} \Rightarrow a = \frac{1}{9a^2} \Rightarrow 9a^3 = 1$

$a = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ ✓ ۵/۱

سوال ۸

$y = \sqrt{x|x| - x}$

$x \geq 0 \longrightarrow \sqrt{x^2 - x}$

$x < 0 \longrightarrow \sqrt{-x^2 - x}$

$\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$ (+)

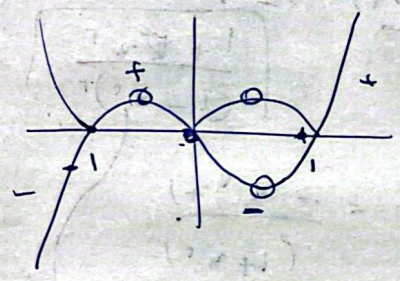
$x(x-1)$ + 0 −

$\frac{-2x-1}{2\sqrt{-x^2-x}}$ (−)

$-x(1+x)$ − 0 +

$-1 \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$

ب) نقطه جران



$k = 4$

$\min = 3$ در

$\max = 2$ در

$\frac{3+2\sqrt{2}}{4-3}$

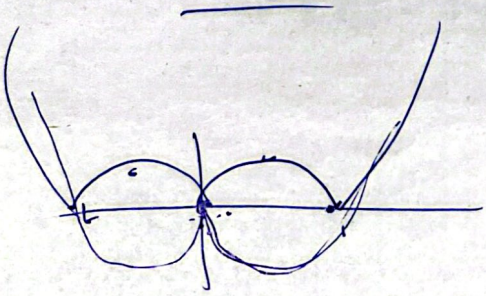
$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2}$

− + − + −

↓ ↑ ↓ ↑ ↓

min max min max min



$x^2 - x$

$x(x-1)$

$x^2 - x = 0$

$x(1+x)(x-1)$

$-1 \quad 0$

سوال ۹

$y = \frac{mx+2}{x-1+m}$ — مشتق — $y' = \frac{m(x-1+m) - 1\times(mx+2)}{(x-1+m)^2}$

$y' = \frac{m^2 - m - 2}{(x-1+m)^2}$ — y' ی $m^2 - m - 2$ ی

$(m-2)(m+1)$ ی

$m-1=0 \rightarrow x = 1-m$ — x ی $m+1$ ی $\neq 0$

$m-1$ ی m ی 1 ی

$m \neq 2$ طبق سوال — m ی 2 ی 0

$m+1-x$ ی x ی

۲ تعداد جواب

سوال ۱۵

$f(x) = \frac{|x|x-1}{x}$

$x<0$ — $y' = \frac{(x^2-1)+2x(x)}{(x^2-1)^2}$ — $\frac{x^2-1}{x}$

x^2-2x^2-1 ی $\frac{2x^2+1}{(x^2-1)^2}$

$x>0$ — $\frac{x^2+1}{x}$ — $\frac{(x^2+1)-2x^2}{(x^2+1)^2}$ — $\frac{1-x^2}{(x^2+1)}$

x ی 1 ی x^2-2x^2-1 — x ی 1 ی $\pm$ ی $\frac{1}{2}$

تابع در نقطه $\pm$ مشتق ندارد

۱ تعداد نقاط

x ی 1 ی $\pm$ ی x — x^2+1 ی x ی

۱ + ۱ −

۷

$x \in [0,a] \rightarrow |x-a| = -(x-a) \rightsquigarrow f(x) = -\sqrt[3]{x^2}(x-a)$

$= -x^{\frac{5}{3}} + a(x^{\frac{2}{3}}) \rightsquigarrow f'(x) = -\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}a(x^{-\frac{1}{3}})$

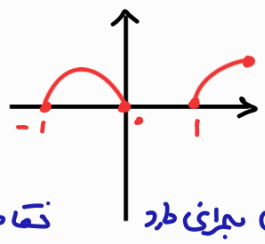
$-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(5x - 2a) \rightsquigarrow f'(x) \mapsto x = 0$

$\hookrightarrow x = \frac{2a}{5}$ ✓ max $\rightarrow f(\frac{2a}{5}) = 1.5$

$\sqrt[3]{\frac{4a^2}{25}}\left|\frac{2a}{5} - a\right| = \frac{3}{2} \rightsquigarrow a^3 \times \frac{4a^2}{25} = \frac{125}{8} \rightsquigarrow a^5 = \frac{5^5}{2^5} \rightarrow \boxed{a = 2.5}$

۸

$y = x|x| - x \begin{cases} x^2 - x & x \geq 0 \\ -x^2 - x & x < 0 \end{cases} \rightsquigarrow$ شکل تابع



مینیمم نسبی ($x = 0$)

نقاط max نسبی ($x = 1$)

شکل ۴ نقطه‌ای بجای طرد ($x = 4$)

$\frac{12m+n}{12-n} = \frac{4+0}{4} = 1$

۱۰

$y = \begin{cases} \frac{x}{1-x^2} & x \geq 0 \\ \hookrightarrow x \neq 1 \\ \frac{x}{1+x^2} & x < 0 \end{cases} \rightsquigarrow D_y = \mathbb{R} - \{1\}$

$y' = \begin{cases} \frac{1-x^2+2x^2}{1-x^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2} & x > 0 \\ \frac{1+x^2-2x^2}{1-x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} & x < 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{x = -1}$

تابع در $x = 0$ مشتق‌پذیر است و مشتق در آن صفر است پس تنها یک نقطه‌ای بجای $x = -1$ داریم