۱۸٫۲۵

سوالات کاربرد مشتق — تکلیف شماره ۲۵ — مطهره کمیلی

سوال ۱ ← ۲

آهنگ لحظه‌ای = $-ax^{-۱} = +ax^{-۲}$

آهنگ متوسط = $\frac{۱ - \frac{a}{۳} - ۱ + \frac{a}{۱}}{۳ - ۱} = \frac{-\frac{a}{۳} + a}{۲} = \frac{\frac{۲}{۳}a}{۲} = \boxed{\frac{a}{۳}}$

برهان $\frac{a}{۳} = ax^{-۲} \rightarrow \boxed{x = \frac{۱}{\sqrt{۳}}}$

سوال ۲ ← ۱٫۷۵

مشتق‌ها برابر است $\rightarrow ۴ax - ۵ = ۱ \rightarrow ۴ax = ۶ \rightarrow ax = \frac{۳}{۲} \rightarrow a = \frac{۳}{۲x} \xrightarrow{x = \pm ۳} a = \pm \frac{۱}{۲}$

مقدار تابع نیز در هر ۲ نمودار برابر است $\leftarrow$

$۲ \times \frac{۳}{۲x} \times x^۲ - \cancel{۵}^{۶}x + \frac{۱۸}{۹} \times \frac{۳}{۲x} = ۰ \rightarrow ۳x - ۶x + \frac{۲۷}{x} = ۰$

$\hookrightarrow (-۳x + \frac{۲۷}{x} = ۰) \times x = ۳(-x^۲ + ۹) = ۰$

$\boxed{x = \pm ۳}$

اگر $a = \frac{۱}{۲}$ باشد ریشه‌ی عبارت مثبت می‌شود و در نتیجه از ناحیه سوم نمی‌افتد پس $a = -\frac{۱}{۲}$

سوال ۳ ← در مینیمم نسبی مشتق در آن نقطه یا وجود ندارد یا صفر است و شیب مماس‌ها از ⊖ به ⊕ تغییر پیدا می‌کند ۱٫۵

$۳x^۲ - ۱۲ = ۰ \rightarrow x^۲ - ۴ = \pm ۲$

$-۲ \quad +۲$

$+ \quad - \quad +$

↗ ↓ ↗

→ جواب نقطه‌ی -۲ است

سوال مقدار min را می‌خواهد ← $f(-۲) = +۸ - ۲۴ + ۲ = -۱۴$

سوال ۴ ← ۱٫۵

$۳x^۲ + ۲ax - ۲b \xrightarrow{-۲ \text{ و } ۰} = ۰ \rightarrow -۲b = ۰ \rightarrow b = ۰$

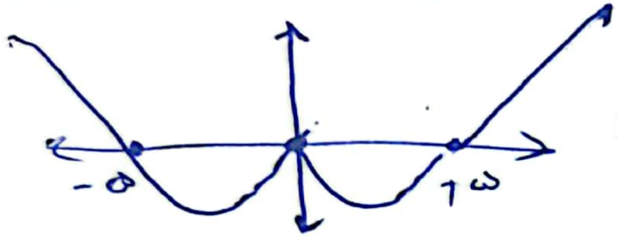
$\searrow ۳ \times ۴ + ۲a \times -۲ = ۰ \rightarrow a = +۳$

$x^۳ + ax^۲ - ۲bx - ۴ \rightarrow x = ۰ \rightarrow y = -۴$

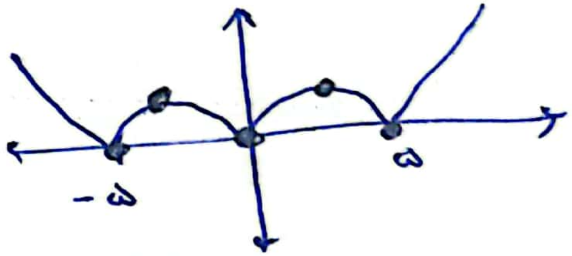
$\hookrightarrow x = -۲ \rightarrow y = -۸ + ۳ \times ۴ - ۴ = ۰$

$\} \ldots = ۴ \rightarrow$ فاصله بین نقاط

سوال ۵ ← نقاط بحرانی را باید پیدا کرد ← پس شکل آن را می‌کشیم



$f(x) \longrightarrow |f(x)| \longrightarrow$



$\frac{n}{m} = \frac{۳}{۲}$ ✓

۲

سوال ۶ ← جواب ۱ نقطه (نقطه صفر) است

$|f(x)| = |x(|x|+۳)| \rightarrow x = ۰$

		۰	
$f(x)$	$-(x\|x\|)-۳x$ $+x^۲-۳x$		$x^۲+۳x$
$f'(x)$	$۲x-۳=۰$ $+\frac{۳}{۲}$		$۲x+۳=۰$ $-\frac{۳}{۲}$

نقاط $-\frac{۳}{۲}$ و $+\frac{۳}{۲}$ در بازه مورد نظر نیستند پس فقط نقطه صفر نقطه‌ی بحرانی ما است

✓ ۲

سوال ۷ ←

$f(x) = \sqrt[۳]{x^۲}\,\underbrace{|x-a|}_{\text{منفی}} \longrightarrow f(x) = \sqrt[۳]{x^۲}\,(a-x) = a x^{\frac{۲}{۳}} - x^{\frac{۵}{۳}}$

$f'(x) = \frac{۲}{۳} a x^{-\frac{۱}{۳}} - \frac{۵}{۳} x^{\frac{۲}{۳}} = \frac{۲}{۳} x^{-\frac{۱}{۳}} (a - \frac{۵}{۲} x) \rightarrow f'(x) = \frac{۲(a-\frac{۵}{۲}x)}{۳\sqrt[۳]{x}}$

نقطه‌ی ⟵ $x = \frac{۲}{۵}$ و a و ۰ نقاط بحرانی می‌باشند چون max مطلق $\frac{۳}{۲}$ است

$f(۰) = f(a) = ۰$

$\hookrightarrow f(\frac{۲}{۵}a) = ۱/۵ \rightarrow \sqrt[۳]{(\frac{۲}{۵}a)^۲}\,.\,\underbrace{(a-\frac{۲}{۵}a)}_{\frac{۳}{۵}a} = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{به توان ۳}} \frac{۴}{۲۵}a^۲ \times \frac{۲۷}{۱۲۵}a^۳ = \boxed{\frac{۲۷}{۸}}$

$\rightarrow \frac{۴a^۵}{۲۵\times۱۲۵} = \frac{۱}{۸} \rightarrow a^۵ = \frac{۲۵\times۱۲۵}{۳۲} = \frac{۵^۵}{۲^۵} = \frac{۵}{۲} = \boxed{۲/۵}$ ✓

۲

سوال ۸ ← نقاط ابتدائی و انتهایی بازه قطعا بحرانی هستند

$$f(x)\quad \begin{array}{ccccccc} & \textcircled{-1} & & \textcircled{0} & & \textcircled{+1} & \\ - & | & + & | & - & | & + \end{array}$$

$\sqrt{-x^2-x}$ $\qquad$ $\sqrt{x^2-x}$

← 0 و ± 1 و $\pm\frac{1}{2}$

(در نقطه ی $\frac{-b}{2a}$ تابع به مقدار max یا مینیمم خود می رسد) ←

$\frac{-b}{2a} = \frac{+1}{2} \to$ در بازه نیست

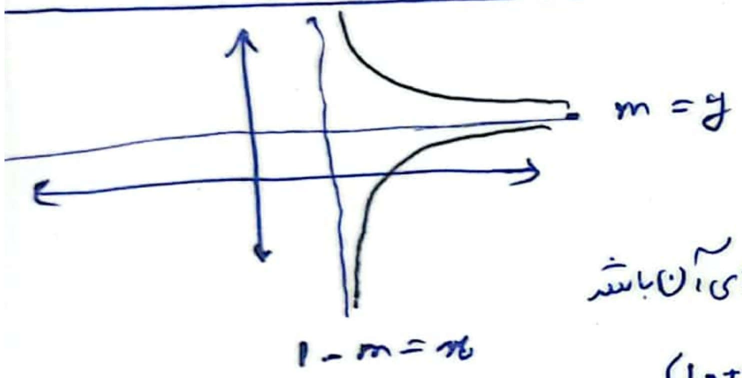
در بازه هست ← $-\frac{1}{2} = \frac{-b}{2a}$

[چون ضریب x^2 منفی است ← $-\frac{1}{2}$ min است

$$\left.\right\} \to \begin{array}{l} k=4 \\ n=1 \\ m=0 \end{array} \to \frac{4\times 0+1}{4-1} = \textcircled{\frac{1}{3}}$$

1,75

سوال ۹ ← از آنجا که می خواهیم فقط تابع نزولی باشد پس باید از مجانب قائم به بعد باشد ←



$1-m \leqslant 1 \leftarrow m \leqslant 2$ و $m \neq 2 \leftarrow \boxed{m<2}$ ①

تابع اگر بالای نمودار $y=m$ باشد نزولی و اگر پایین آن باشد صعودی می باشد پس باید بالای آن باشد

$$(1,+\infty)\quad \frac{mx+2}{x-1+m} > m \to \frac{-m^2+m-\cancel{mx}+\cancel{mx}+2}{x-1+m} > 0$$

۲

$$-\frac{(m^2-m-2)}{x-1+m} = (m-2)(m+1) \quad \begin{array}{ccccccc} & -1 & & \textcircled{1} & & 2 & \\ - & | & + & & | & - & \end{array}$$

چون مخرج x پس ریشه آن قبل است و به آن کاری نداریم ←

پس جواب ها ← ۱ و ۰ و ← ۲ جواب

سوال ۱۰ ← باید تعریف نشده یا صفر باشد

$$\frac{x}{1-x|x|} \begin{cases} 0 \geqslant x \\ 0 < x \end{cases}$$

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{1(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \to \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \to \textcircled{-1}$$

$$\frac{x}{1-x^2} = \frac{1(1-x^2)+2x^2}{(1-x^2)^2} = 0 \quad \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \to \textcircled{+1}$$

پس ۲ نقطه بحرانی دارد

1,75

۴

$y' = ۳x^۲ + ۲ax - ۲b \rightarrow f'(۰) = ۰ \longrightarrow \boxed{b = ۰}$

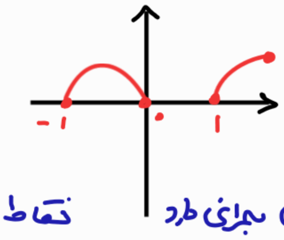
$\hookrightarrow f'(-۲) = ۰ \longrightarrow ۱۲ - ۴a = ۰ \longrightarrow \boxed{a = +۳}$

$y = x^۳ + ۳x^۲ - ٤ \rightarrow f(۰) = -٤$

$\hookrightarrow f(-۲) = ۰$ ⟿ فاصله $= \sqrt{۴^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۲۰} = \boxed{۲\sqrt{۵}}$

۸

$y = x|x| - x \begin{cases} x^۲ - x & x \geq ۰ \\ -x^۲ - x & x \leq ۰ \end{cases}$ ⟿ شکل تابع



مینیمم نسبی
$(n = ۰)$

نقاط max نسبی
$(m = ۱)$

شکل ۴ نقطه‌ای بحرانی دارد
$(k = ٤)$

$\frac{km + n}{k - n} = \frac{۴ + ۰}{۴} = ①$

۱۰

$y = \begin{cases} \frac{x}{1 - x^۲} & x \geq ۰ \\ \frac{x}{1 + x^۲} & x \leq ۰ \end{cases}$ $\hookrightarrow x \neq ۱$ ⟿ $D_y = \mathbb{R} - \{۱\}$

$y' = \begin{cases} \frac{1 - x^۲ + ۲x^۲}{1 - x^۲} = \frac{1 + x^۲}{1 - x^۲} & x > ۰ \\ \frac{1 + x^۲ - ۲x^۲}{1 - x^۲} = \frac{1 - x^۲}{1 + x^۲} & x < ۰ \end{cases} \longrightarrow \boxed{x = -1}$

تابع در $x = ۰$ مشتق‌پذیر است و مشتق در آن صفر نیست پس تنها یک نقطه‌ای بحرانی $\underline{x = -1}$ دارد