تکلیف شماره‌ی ۲۵ تکلیف شماره ۲۵ نکات بیات

آزمون ۱۹٫۲۵

۱- $f(x) = 1 - \frac{a}{x}$ ۱٫۷۵

آهنگ متوسط در بازه‌ی $[1,3]$ $= \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{1-\frac{a}{3}-(1-a)}{2} = \frac{1-\frac{a}{3}-1+a}{2}$

$= \frac{\frac{2a}{3}}{2} = \frac{a}{3}$ $\quad f'(x) = \frac{a}{x^2} \longrightarrow \frac{a}{x^2} = \frac{a}{3}$

جواب $x = \pm\sqrt{3}$

$x=-\sqrt{3}$ در بازه‌ی $[1,3]$ قرار ندارد
پس $x=\sqrt{3}$ تنها قابل قبول است!

---

۲- چون بر نیمساز ناحیه سوم مماس است، آن را با خط $y=x$ قطع می‌دهیم.

$$\begin{cases} y = 2ax^2 - 5x + 18a \\ y = x \end{cases}$$

$2ax^2 - 5x + 18a = x$

$2ax^2 - 6x + 18a = 0 \longrightarrow ax^2 - 3x + 9a = 0$

$\xrightarrow{\Delta=0} 9 - 4(a)(9a) = 0 \longrightarrow 36a^2 = 9 \longrightarrow a^2 = \frac{1}{4}$

$a = \pm\frac{1}{2}$

if $a = \frac{1}{2} \longrightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2} = 0 \longrightarrow x = 3$ ✗ غق

if $a = \frac{-1}{2} \longrightarrow \frac{-1}{2}x^2 - 3x - \frac{9}{2} = 0 \longrightarrow x = -3$ ✓ قق

۲ جواب $a = -\frac{1}{2}$

Scbo

۳ـ

$y = x^3 - 12x + 2$

$y' = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$

| | | $-2$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | | $-$ | | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

پس نقطه $x=2$ مینیمم نسبی تابع است. ۲

$f(2) = 2^3 - 12(2) + 2 = -14$ جواب

---

۴ـ

$y = x^3 + ax^2 - 2bx - 4$

$y' = 3x^2 + 2ax - 2b$

$\text{if } x=0 \longrightarrow y'=0 \longrightarrow -2b=0 \longrightarrow b=0$

$\text{if } x=-2 \longrightarrow y'=0 \longrightarrow 12-4a=0 \longrightarrow a=3$

$y = x^3 + 3x^2 - 4$

| | |
|---|---|
| $0$ | $-2$ |
| $-4$ | $0$ |

۲

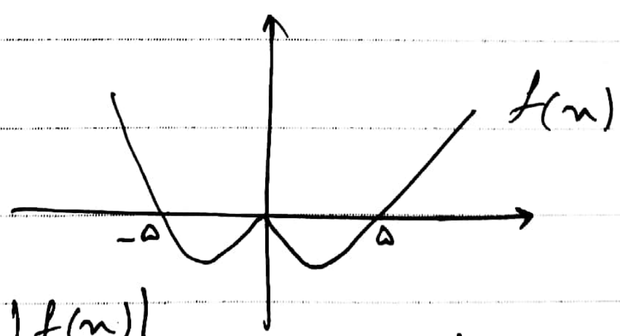
فاصله دو نقطه $= \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ جواب

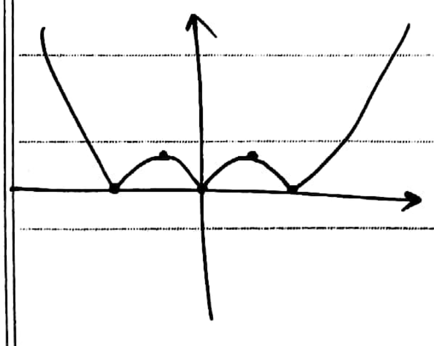
---

۵ـ

$f(x) = x^2 - 5|x|$

$f(x) = |x|^2 - 5|x|$



$|f(x)|$

تعداد $\text{Max}$ نسبی $= 2$

تعداد $\text{Min}$ نسبی $= 3$

۲

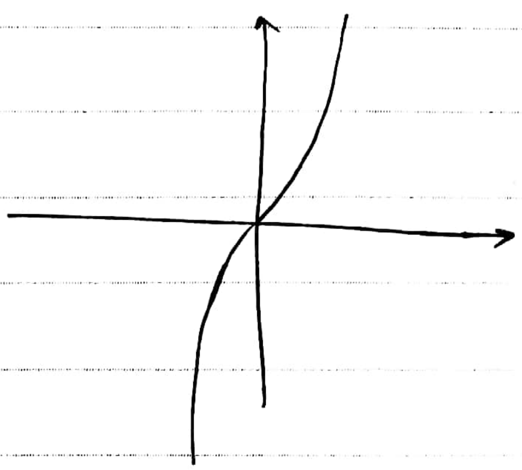
$\frac{n}{m} = \frac{3}{2}$ جواب

۶ـ

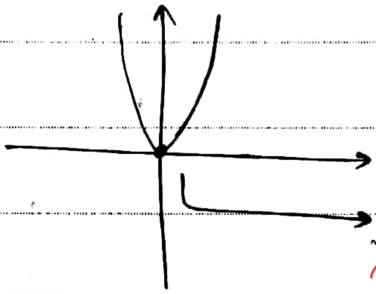
$y = |f(x)|$

$f(x) = x\left(|x| + ۳\right)$

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۳x & x \geq ۰ \\ -x^۲ + ۳x & x < ۰ \end{cases}$$




$y = |f(x)|$



۱ نقطه‌ی بحرانی دارد ✓

نقطه‌ی ۱ ۰

۲

---

۷ـ

$f(x) = \sqrt[۳]{x^۲}\,|x-a|$

در بازه‌ی $[۰, a]$ $\longrightarrow f(x) = \sqrt[۳]{x^۲}(a-x)$

$f'(x) = \dfrac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}(a-x) + (-۱)(\sqrt[۳]{x^۲}) \longrightarrow$

$f'(x) = \dfrac{۲a - ۵x}{۳\sqrt[۳]{x}} \longrightarrow f'(x) = ۰ \longrightarrow ۲a - ۵x = ۰$

$\boxed{x = \dfrac{۲a}{۵}}$

if $x = ۰ \longrightarrow y = ۰$

if $x = a \longrightarrow y = ۰$

if $x = \dfrac{۲a}{۵} \longrightarrow y = \sqrt[۳]{\left(\dfrac{۲a}{۵}\right)^۲ \times \dfrac{\cancel{۳}a}{۵}} = \dfrac{\cancel{۳}}{۲}$

$\xrightarrow{\text{به توان ۳}} \dfrac{۴a^۲}{۲۵} \times \dfrac{a^۳}{۱۲۵} = \dfrac{۱}{۸} \longrightarrow \dfrac{۴a^۵}{۵^۵} = \dfrac{۱}{۸}$

تکالیف

$\longrightarrow 32a^5 = 5^5 \longrightarrow (2a)^5 = 5^5 \longrightarrow \boxed{a = \frac{5}{2}}$

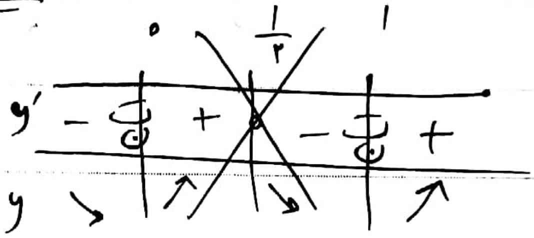
جواب ۳

۸ـ $f(x) = \sqrt{x|x| - x}$

if $x > 0 \longrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 - x} \longrightarrow D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

در دامنه نیست

$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$

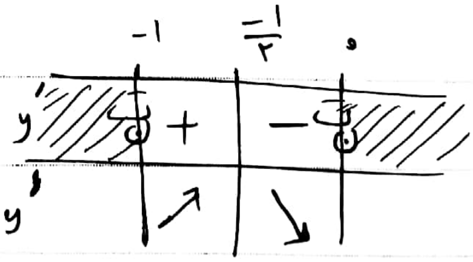



ندارد } Max نسبی ندارد } Min نسبی

$x = 0$
$x = 1$
} نقاط بحرانی

if $x < 0 \longrightarrow f(x) = \sqrt{-x^2 - x}$ $D_f = [-1, 0]$

$f'(x) = \frac{-2x - 1}{2\sqrt{-x^2 - x}}$




$x = \frac{-1}{2}$ } Max نسبی ندارد } Min نسبی

$x = 0$
$x = -1$
$x = \frac{-1}{2}$
} نقاط بحرانی

نیکا حساب

تعداد کل نقاط بحرانی $= K = 4$ ( ۰ و ۱ و ۱- و $-\frac{1}{2}$ )

تعداد Max های نسبی $= m = 1$ ( $-\frac{1}{2}$ )

تعداد Min های نسبی $= n = 0$ ( Min نسبی ندارد )

$\frac{km+n}{k-n} = \frac{4+0}{4-0} = 1$ جواب ۳

---

۹- $y = \frac{mx+2}{x-1+m} \longrightarrow y' = \frac{m^2-m-2}{\underbrace{(x-1+m)^2}_{\text{همواره } +}}$

برای اینکه تابع در بازه $(1,+\infty)$ نزولی باشد صورت عبارت مشتق باید کوچکتر و یا مساوی صفر باشد.

$m^2-m-2 \le 0 \longrightarrow (m-2)(m+1) \le 0$

| | $-1$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $+$ | | $-$ | | $+$ |

$m \to [-1,2]$ طبق صورت سوال $\boxed{m \neq 2}$

$m = -1, 0, 1$

جواب ← ۳ مقدار برای $m$ داریم.

۱,۷۵

---

۱۰- $f(x) = \frac{x}{1-x|x|}$

$\text{if } x>0 \longrightarrow f(x) = \frac{x}{1-x^2} \longrightarrow f'(x) = \frac{\overbrace{x^2+1}^{\text{همواره } +}}{(1-x^2)^2} \longrightarrow$

نقاط مشتق ناپذیر $= \{ 1 \}$

ادامه سوال ص بعد

نیمسال اول

if $x<0 \rightarrow f(x)=\dfrac{x}{1+x^2} \rightarrow f'(x)=\dfrac{1-x^2}{\underbrace{(1+x^2)^2}_{\text{همواره + و غیر صفر}}}$

نقاطی که مشتق را برابر صفر است. $\rightarrow \boxed{x=-1}$

1,75

پس ۲ نقطه بحرانی دارد $(x=-1, x=1)$

۹

$f'(x)<0 \rightarrow m^۲ - m - ۲ \leq ۰ \rightarrow -۱ \leq m \leq ۲ \;,\; m \neq ۲ \rightsquigarrow \overset{1}{-۱ \leq m < ۲}$

(در ریشه‌ی مفرد) $x \rightarrow ۱ - m \leq ۱ \rightarrow \overset{2}{m \geq ۰}$

$1, 2 \rightsquigarrow \boxed{m = ۰ \text{ یا } ۱}$

---

۱۰

$$y = \begin{cases} \dfrac{x}{۱-x^۲} & x \geq ۰ \\[2ex] \dfrac{x}{۱+x^۲} & x \leq ۰ \end{cases} \qquad x \neq ۱ \qquad \rightsquigarrow D_y = \mathbb{R} - \{۱\}$$

$$y' = \begin{cases} \dfrac{۱-x^۲+۲x^۲}{۱-x^۲} = \dfrac{۱+x^۲}{۱-x^۲} & x > ۰ \\[2ex] \dfrac{۱+x^۲-۲x^۲}{۱-x^۲} = \dfrac{۱-x^۲}{۱+x^۲} & x < ۰ \longrightarrow \boxed{x = -۱} \end{cases}$$

تابع در $x = ۰$ مشتق‌پذیر است و مشتق در آن صفر نیست پس تنها یک نقطه‌ی بحرانی $x = -۱$ دارد