۱ـ $f(x) = 1 - \frac{a}{x}$

آهنگ متوسط در بازه‌ی $[1,3]$ $= \frac{f(3) - f(1)}{3-1} = \frac{1 - \frac{a}{3} - (1-a)}{2} = \frac{1 - \frac{a}{3} - 1 + a}{2}$

$= \frac{\frac{2a}{3}}{2} = \frac{a}{3}$ $\quad f'(x) = \frac{a}{x^2} \longrightarrow \frac{a}{x^2} = \frac{a}{3}$

جواب $x = \pm\sqrt{3}$

۲ـ چون بر نیمساز ناحیه‌ی سوم مماس است، آن را با خط $y=x$ قطع می‌دهیم.

$$\begin{cases} y = 2ax^2 - 5x + 18a \\ y = x \end{cases}$$

$2ax^2 - 5x + 18a = x$

$2ax^2 - 6x + 18a = 0 \longrightarrow ax^2 - 3x + 9a = 0$

$\xrightarrow{\Delta = 0} 9 - 4(a)(9a) = 0 \longrightarrow 36a^2 = 9 \longrightarrow a^2 = \frac{1}{4}$

$a = \pm\frac{1}{2}$

if $a = \frac{1}{2} \longrightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2} = 0 \longrightarrow x = 3$ × غ‌ق‌ق

if $a = \frac{-1}{2} \longrightarrow \frac{-1}{2}x^2 - 3x - \frac{9}{2} = 0 \longrightarrow x = -3$ ✓ ق‌ق

جواب $a = -\frac{1}{2}$

۳ـ

$y = x^3 - 12x + 2$

$y' = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$

x		-2		2	
y'	$+$		$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

← بین نقطهٔ $x=2$ مینیمم نسبی تابع است

$f(2) = 2^3 - 12(2) + 2 = -14$ جواب

۴ـ

$y = x^3 + ax^2 - 2bx - 4$

$y' = 3x^2 + 2ax - 2b$

if $x=0 \longrightarrow y'=0 \longrightarrow -2b=0 \longrightarrow b=0$

if $x=-2 \longrightarrow y'=0 \longrightarrow 12-4a=0 \longrightarrow a=3$

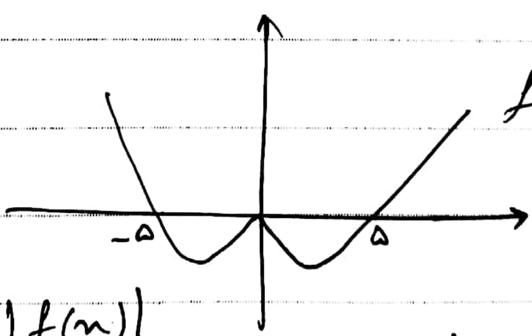
$y = x^3 + 3x^2 - 4 \qquad \begin{vmatrix} 0 \\ -4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \end{vmatrix}$

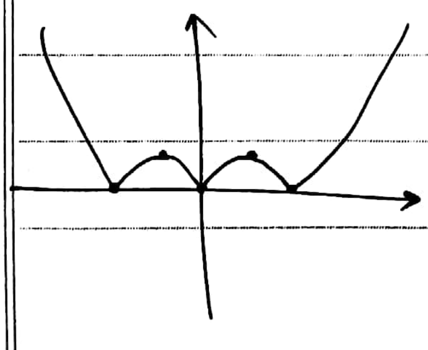
فاصلهٔ دو نقطه $= \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ جواب

۵ـ

$f(x) = x^2 - 5|x|$

$f(x) = |x|^2 - 5|x|$





$|f(x)|$

تعداد Max نسبی $= 2$

تعداد Min نسبی $= 3$

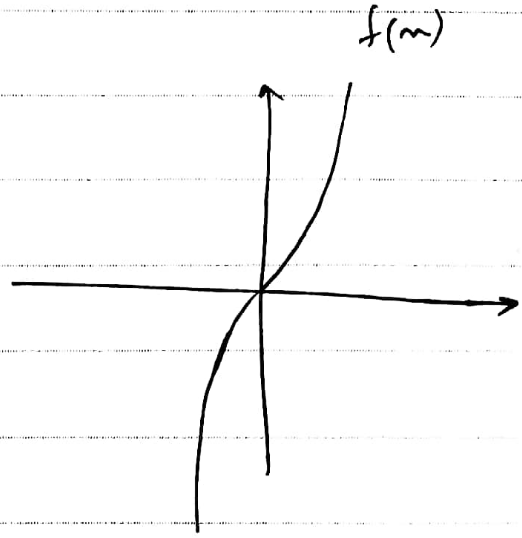
$\frac{n}{m} = \frac{3}{2}$ جواب

۶_

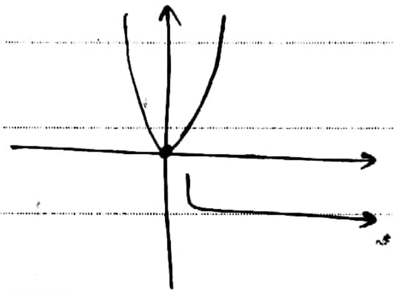
$$y = |f(x)|$$

$$f(x) = x\,(|x| + 3)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & x \geq 0 \\ -x^2 + 3x & x < 0 \end{cases}$$



$$y = |f(x)|$$



۱ نقطه‌ی بحرانی دارد ✓

نقطه‌ی ۰ |

۷_

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,|x-a|$$

در بازه‌ی $[0,a]$ $\longrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,(a-x)$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(a-x) + (-1)\left(\sqrt[3]{x^2}\right) \longrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{2a-5x}{3\sqrt[3]{x}} \longrightarrow f'(x) = 0 \longrightarrow 2a - 5x = 0$$

$$\boxed{x = \frac{2a}{5}}$$

if $x = 0 \longrightarrow y = 0$

if $x = a \longrightarrow y = 0$

if $x = \frac{2a}{5} \longrightarrow y = \sqrt[3]{\left(\frac{2a}{5}\right)^2 \times \frac{\cancel{3}a}{5}} = \frac{\cancel{3}}{2}$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۳}} \frac{4a^2}{25} \times \frac{a^3}{125} = \frac{1}{8} \longrightarrow \frac{4a^5}{5^5} = \frac{1}{8}$$

تکالیف

$$\longrightarrow 32a^5 = 5^5 \longrightarrow (2a)^5 = 5^5 \longrightarrow \boxed{a = \frac{5}{2}}$$

جواب

۸ـ $f(x) = \sqrt{x|x| - x}$

$\text{if } x > 0 \longrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 - x} \longrightarrow D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

در دامنه نیست

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

x		0		$\frac{1}{2}$		1	
y'	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Max نسبی ندارد

Min نسبی ندارد

نقاط بحرانی: $x = 0$، $x = 1$

$\text{if } x < 0 \longrightarrow f(x) = \sqrt{-x^2 - x} \qquad D_f = [-1, 0]$

$$f'(x) = \frac{-2x - 1}{2\sqrt{-x^2 - x}}$$

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0
y'	$\nexists$	$+$		$-$	$\nexists$
y		$\nearrow$		$\searrow$	

Max نسبی: $x = -\frac{1}{2}$

Min نسبی ندارد

نقاط بحرانی: $x = 0$، $x = -1$، $x = -\frac{1}{2}$

نیکا حساب

تعداد کل نقاط بحرانی $= k = 4$ $\left(0 , 1 , -1 , -\frac{1}{2} \right)$

تعداد Max های نسبی $= m = 1$ $\left(-\frac{1}{2} \right)$

تعداد Min های نسبی $= n = 0$ (Min نسبی ندارد)

$$\frac{km+n}{k-n} = \frac{4+0}{4-0} = 1$$ جواب

۹ـ

$$y = \frac{mx+2}{x-1+m} \longrightarrow y' = \frac{m^2-m-2}{\underbrace{(x-1+m)^2}_{\text{همواره } +}}$$

برای اینکه تابع در بازه $(1, +\infty)$ نزولی باشد صورت عبارت مشتق باید کوچکتر و یا مساوی صفر باشد.

$$m^2-m-2 \leq 0 \longrightarrow (m-2)(m+1) \leq 0$$

	-1		2	
$+$		$-$		$+$

$m \rightarrow [-1, 2]$ طبق صورت سوال $\boxed{m \neq 2}$

$m = -1 , 0 , 1$

جواب ← ۳ مقدار برای m داریم.

۱۰ـ

$$f(x) = \frac{x}{1-x|x|}$$

$$\text{if } x>0 \longrightarrow f(x) = \frac{x}{1-x^2} \longrightarrow f'(x) = \frac{\overbrace{x^2+1}^{\text{همواره } +}}{(1-x^2)^2} \longrightarrow$$

نقاط مشتق ناپذیر $= \{ 1 \}$

ادامه سوال در صفحه بعد

نیک‌ماب

if $x<0 \rightarrow f(x)=\frac{x}{1+x^2} \rightarrow f'(x)=\frac{1-x^2}{\underbrace{(1+x^2)^2}_{\text{همواره + و غیر صفر}}}$

نقاطی که مشتق را برابر صفر است. $\rightarrow \boxed{x=-1}$

پس ۲ نقطه بحرانی دارد $(x=-1, x=1)$