۱) $f(1)=1-a \quad f(3)=1-\frac{a}{3} \quad \frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{1-\frac{a}{3}-1+a}{2}=\frac{a}{3} \quad f'(x)=\frac{a}{x^2} \quad \frac{a}{x^2}=\frac{a}{3}\rightarrow x^2=3 \xrightarrow{x\in[1,3]} x=\sqrt{3}$

۲) $A\left|\begin{matrix}m\\m\end{matrix}\right. \quad f'(m)=1 \quad f'(x)=4ax-5 \quad 4am-5=1 \quad m=\frac{3}{2a} \quad f(m)=m \rightarrow 2am^2-5m+18a=m$

$\xrightarrow{m=\frac{3}{2a}} 2a\left(\frac{3}{2a}\right)^2-5\left(\frac{3}{2a}\right)+18a=\frac{3}{2a} \quad \frac{9}{2a}-\frac{15}{2a}+\frac{36a^2}{2a}=\frac{3}{2a} \quad \frac{36a^2-9}{2a}=0 \quad a^2=\frac{1}{4} \quad a=\pm\frac{1}{2} \xrightarrow[m<0]{\text{ناحیه سوم}} a=-\frac{1}{2}$

۳) $f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$

$$\begin{array}{ccccc} & -2 & & 2 & \\ \hline + & 0 & - & 0 & + \\ \nearrow & & \searrow & & \nearrow \end{array}$$

$f(2)=(2)^3-12(2)+2=-14$ در $x=2$ مینیمم نسبی داریم.

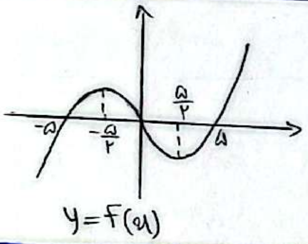
۴) $f'(x)=3x^2+2ax-2b \quad S=-2 \rightarrow \frac{-2a}{3}=-2 \quad a=3$

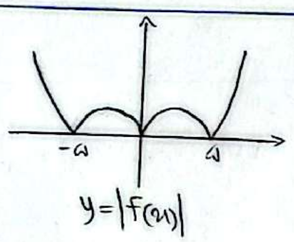
نقاط صفر و ۲- ریشه‌های تابع مشتق هستند.

$P=0 \rightarrow b=0 \quad f(x)=x^3+3x^2-4 \quad f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-4=0 \quad f(0)=-4$

$AB=\sqrt{(-2-0)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

۵)

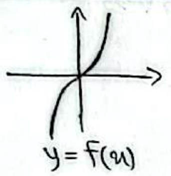


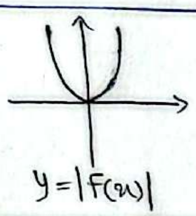


با توجه به شکل دو نقطه ماکسیمم نسبی و سه نقطه مینیمم نسبی دارند.

$m=2 \quad n=3 \quad \frac{n}{m}=\frac{3}{2}$

۶) $f(x)=\begin{cases} x(x+3) & x\geq 0\\ -x(x-3) & x\leq 0\end{cases}$





طبق شکل تابع یک نقطه بحرانی دارد.

۷) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}|x-a| \xrightarrow{x\in[0,a]} f(x)=x^{\frac{2}{3}}(a-x) \quad f'(x)=\frac{2}{3}ax^{-\frac{1}{3}}-\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2a-5x)$

$f'(x)=\frac{2a-5x}{3\sqrt[3]{x}} \quad x=\frac{2a}{5}\rightarrow f(x)=1{,}5$

$x=0$ و $x=\frac{2a}{5}$ و $x=a$ نقاط بحرانی تابع هستند.

$\sqrt[3]{\left(\frac{2a}{5}\right)^2}\left(a-\frac{2a}{5}\right)=\frac{3}{2} \rightarrow \frac{4a^2}{25}\times\frac{27a^3}{125}=\frac{27}{8} \quad a=\frac{5}{2}$

۸) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-x} & x\geq 1\\ \sqrt{-x^2-x} & x\leq 0\end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases}\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} & x>1\\ \frac{-2x-1}{2\sqrt{-x^2-x}} & x<0\end{cases}$

نقاط بحرانی: $x=0$ و $x=1$ و $x=-1$ و $x=-\frac{1}{2}$ $k=4$

$$\rightarrow \begin{array}{ccc} & -\frac{1}{2} & \\ \hline + & 0 & - \\ \nearrow & & \searrow \end{array}$$

ماکسیمم نسبی: $x=-\frac{1}{2}$ $m=1$

مینیمم نسبی: ندارد

$\frac{km+n}{k-n}=\frac{4\times 1+0}{4-0}=1$

۹) $f'(x)=\frac{m^2-m-2}{(x-1+m)^2} \quad f'(x)\leq 0 \rightarrow (m-2)(m+1)\leq 0$

$$\begin{array}{ccccc} & -1 & & 2 & \\ \hline + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$-1\leq m\leq 2$ (I)

تابع در بازه $(1,+\infty)$ پیوسته است پس مخرج نباید ریشه داشته باشد.

$1-m\leq 1 \quad m\geq 0$ (II) $I\cap II \rightarrow 0\leq m\leq 2 \xrightarrow{m\neq 2} 0\leq m<2$ شامل دو عدد صحیح

۱۰) $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1-x^2} & x\geq 0\\ \frac{x}{1+x^2} & x\leq 0\end{cases} \qquad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0)\rightarrow$ $x=0$ بحرانی نیست

یک نقطه بحرانی دارد.

$f'(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} & x\geq 0\\ \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & x\leq 0\end{cases} \qquad 1-x^2=0\rightarrow\begin{cases}x=1\\ x=-1\end{cases}$ باید $x\leq 0$ باشد پس غ ق ق