۱۹/۵ آفرین

نام و نام خانوادگی ......مریم معصومی........ **پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره** ...۲۵... **کلاس** ....دوازدهم ریاضی....

۱

$f(x) = 1 - \frac{a}{x}$. آهنگ متوسط در $[1,3]$ → $\frac{f(3)-f(1)}{2} = \frac{1-\frac{a}{3}-(1-a)}{2} = \frac{a-\frac{a}{3}}{2} = \frac{\frac{2a}{3}}{2} = \frac{a}{3}$ ①

آهنگ لحظه‌ای $f(x)$ = $f'(x) = +\frac{a}{x^2}$ ②

①=② $\frac{\cancel{a}}{3} = \frac{\cancel{a}}{x^2} \to x^2 = 3 \to x = \pm\sqrt{3}$

← جواب قابل قبول $x=\sqrt{3}$ چون $x \in [1,3]$

۲

۲

$y = 2ax^2 - 5x + 18a$ $\quad f(x) = g(x)$ و $f'(x) = g'(x)$

$y' = 4ax - 5 = 1 \to x = \frac{6}{4a} = \frac{3}{2a}$ $\quad g(x) = x$ نیمساز ناحیه سوم

$f(x) = g(x) = \cancel{2a} \times \frac{9}{2a \times \cancel{2a}} - \frac{15}{2a} + 18a = \frac{3}{2a} \to \frac{\cancel{9}}{2a} = \cancel{18}^{2}a \to a^2 = \frac{1}{4}$

$\boxed{a = \pm\frac{1}{2}}$

اگر $a=\frac{1}{2}$ باشد ریشه‌ی عبارت مثبت می‌شود و در نیمساز ناحیه سوم نمی‌افتد پس $a = -\frac{1}{2}$

۱/۷۵

۳

$y = x^3 - 12x + 2$ مقدار مینیمم نسبی

← مشتق می‌گیریم و تعیین علامت می‌کنیم

$\to y' = 3x^2 - 12 = 3(x^2-4) = 3(x-2)(x+2)$

	-2		2	
f'	+	−	+	
f	↗ max نسبی	↘	min نسبی ↗	

$\to f(2) = 8 - 24 + 2 = -14$

۲

۴

$y = x^3 + ax^2 - 2bx - 4$ یعنی 0 و -2 ریشه‌های مشتق تابع هستند (نقاط بحرانی هستند)

$y' = 3x^2 + 2ax - 2b \to f'(0) = 0 \quad 3(0) + 2a(0) - 2b = 0 \to 2b = 0 \quad b = 0$ ①

↳ $f'(-2) = 0 \quad 12 - 4a = 0 \quad 12 = 4a \to a = 3$ ②

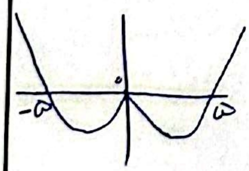
①و② $\to y = x^3 + 3x^2 - 4 \to f(0) = -4 \to (0,-4)$; $f(-2) = 0 \quad (-2,0)$ } فاصله‌ی این دو نقطه

$\sqrt{(0-(-2))^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

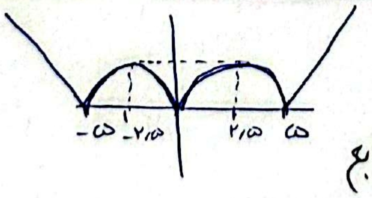
۲

۵

$y = x^2 - 5|x|$



$y = |f(x)|$



نقطه‌های به طول $2/5$ و $-2/5$ max نسبی

تابع هستند ← m = دو نقطه

و نقطه‌های به طول 5 و -5 و 0 min نسبی تابع

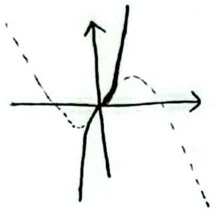
هستند: n = سه نقطه

$\frac{n}{m} = \frac{3}{2}$

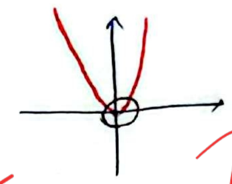
۲

$f(x) = x(|x|+3)$ $\qquad$ $y=|f(x)|$ ۶

$\begin{cases} x^2+3x & x>0 \\ -x^2+3x & x<0 \end{cases}$



$\xrightarrow{|f(x)|}$



۲

این تابع در نقطه ی صفر بحرانی است

یک نقطه ی بحرانی

$f(x)=\sqrt[3]{x^2}\;|\underbrace{x-a}_{\text{منفی}}|$ $\xrightarrow{x\in[0,a]}$ $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\,(a-x) = ax^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$ ۷

$f'(x) = \frac{2}{3}ax^{-\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\left(a-\frac{5}{2}x\right) \to f'(x)=\frac{2\left(a-\frac{5}{2}x\right)}{3\sqrt[3]{x}}$

ریشه مشتق

نقطه $x=0$ و $a=a$ و $x=\frac{2}{5}a$ نقاط بحرانی تابع می باشد. که چون max مطلق $\frac{3}{2}$ است $f(0)=f(a)=0$

۲

$f(\frac{2}{5}a)=1/5 \Rightarrow \sqrt[3]{(\frac{2}{5}a)^2}\;\underbrace{\left(a-\frac{2}{5}a\right)}_{\frac{3}{5}a}=\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{به توان 3}} \frac{4}{25}a^2\times\frac{27}{125}a^3=\frac{27}{8}$ سر دو تا بازه

$\to \frac{4a^5}{25\times125}=\frac{1}{8} \to a^5=\frac{25\times125}{32}=\frac{5^5}{2^5} \Rightarrow a=\frac{5}{2}=2/5$

$f(x)=\sqrt{x|x|-x}$ ① $x>0$ $\quad x^2-x$ $\quad \begin{array}{ccc} & 0 & 1 \\ + & - & + \end{array}$ ق ق $x>1$ از راه رسم تابع کمک می گیریم ۸

② $x<0$ $\quad -x^2-x \to -x^2-x>0 \to -x(x+1)$ $\quad \begin{array}{ccc} & -1 & 0 \\ - & + & - \end{array}$

ق ق $-1<x<0$

این تابع یک نقطه ماکسیمم نسبی دارد $\{-\frac{1}{2}\}$

و min نسبی ندارد.

و ۴ نقطه بحرانی $\{1$ و 0 و -1 و $-\frac{1}{2}\}$ دارد.

$m=1 \quad n=0 \quad k=4 \quad \frac{4(1)+0}{4-0}=\frac{4}{4}=1$

$y=\frac{mx+2}{x+m-1}$ $\quad (1,+\infty)$ تابع y روی بازه $(1,+\infty)$ نزولی است پس y' باید منفی یا صفر باشد. ۹

$y'=\frac{m(m-1)-2}{(x-1+m)^2}=\frac{m^2-m-2}{\underbrace{(x+m-1)^2}_{\text{همواره مثبت}}}\le0 \to m^2-m-2\le0 \to -1\le m\le2$ ①

$\begin{array}{ccccc} & -1 & & 2 & \\ + & & - & & + \end{array}$

و ریشه مخرج یعنی $x=1-m$ نباید در بازه $(1,+\infty)$ باشد $\quad$ ② $m\geq0 \Leftarrow 1\geq 1-m$

$\xrightarrow{①\cap②} 0\le m\le 2 \to m\ne2 \to$ $m=0$ و $m=1$ دو جواب

۲

$f(x)=\frac{x}{1-x|x|} \to f'(x)$ ۱۰

نقاط بحرانی نقاطی هستند که مشتق تابع یا صفر است در آن نقطه و یا وجود ندارد پس مشتق تابع را می گیریم

① در نقطه ۱ و ۱-

۱/۲۵

$x>0 \to \frac{x}{1-x^2} \qquad \frac{1-x^2-x(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$

$x<0 \to \frac{x}{1+x^2} \to \frac{1(1+x^2)-x(2x)}{(1+x^2)^2}=\frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2}$ $\quad$ نقطه ۱ / نقطه ۱- ②

$x=-1$ ✓

نقطه ۱ در بازه نیست

① ∪ ② → نقطه ۱ و ۱- نقاط بحرانی تابع

۱۰

$$y = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x^2} & x \geq 0 \quad \curvearrowright x \neq 1 \\ \dfrac{x}{1+x^2} & x \leq 0 \end{cases} \rightsquigarrow D_y = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$y' = \begin{cases} \dfrac{1-x^2+2x^2}{1-x^2} = \dfrac{1+x^2}{1-x^2} & x > 0 \\ \dfrac{1+x^2-2x^2}{1-x^2} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} & x < 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{x = -1}$$

تابع در $x=0$ مشتق پذیر است و مشتق در آن صفر نیست پس تنها یک نقطه‌ای بحرانی $x=-1$ دارد