(۱) هلیش کرمی ـ دوازدهم تجربی (B) به نام خدا

$f(x) = 1 - \frac{a}{x}$ $\quad [1, 3]$

آهنگ متوسط تغییر $= \frac{f(3) - f(1)}{2} = \frac{\cancel{1} - \frac{a}{3} - \cancel{1} + a}{2} =$

آفرین ۱۹٫۵

آهنگ لحظه‌ای تغییر : $f(x) = 1 - (a)\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f'(x) = -a\left(\frac{-1}{x^2}\right) \Rightarrow \frac{\frac{2a}{3}}{\frac{2}{1}} = \frac{a}{3}$

$\Rightarrow \frac{a}{x^2} = \frac{a}{3} \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$ $\quad f'(x) = \frac{a}{x^2}$

$\xrightarrow{[1,3]} x = \cancel{\pm}\sqrt{3}$ $\quad$ ۲

---

(۲)

$y = 2ax^2 - 5x + 18a$

$y = x$

۱٫۲۵

برابری مشتق‌ها : $4ax - 5 = 1 \sim 4ax = 6 \sim x = \frac{6}{4a} = \frac{3}{2a}$ $\Rightarrow x_y = \frac{3}{2a}$

برابری مقادیر تابع : $2ax^2 - 5x + 18a = x \Rightarrow 2ax^2 - 6x + 18a = 0 \Rightarrow ax^2 - 3x + 9a = 0$

$\Longrightarrow \Delta = 0 : \quad 9 - 4(a)(9a) = 0 \Rightarrow 36a^2 = 9 \Rightarrow a^2 = \frac{9}{36} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = y = 3 \\ x = y = -3 \end{cases}$ $\quad \boxed{a = \pm\frac{1}{2}}$ $\quad a = -\frac{1}{2}$ اگر $a = \frac{1}{2}$ باشد ریشه‌ی عبارت مثبت می‌شود و درنتیجه از ناحیه سوم نمی‌افتد پس

---

(۳)

$y = x^3 - 12x + 2 = f(x)$

$y' = 3x^2 - 12 = f'(x)$

x		-2		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max نسبی	$\searrow$	min نسبی	$\nearrow$

مقدار مینیمم نسبی $\Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 8 - 24 + 2 = -14$ $\quad$ ۲

---

(۴)

$y = x^3 + ax^2 - 2bx - 4 \longrightarrow y' = 3x^2 + 2ax - 2b$ $\quad$ در نقطه به طول صفر و -2 مشتق صفر است $\quad y'(0) = -2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$

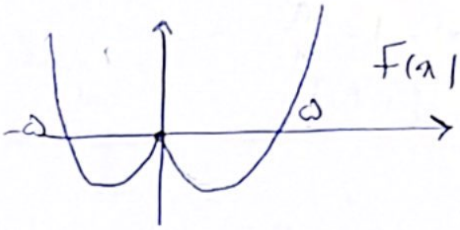
$\Rightarrow y'(-2) = 0 \Rightarrow 12 - 4a - \cancel{2b} = 0 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

$\Rightarrow$ ضابطه تابع : $y = x^3 + 3x^2 - 4$ $\quad \begin{cases} \xrightarrow{\text{ext نسبی}} (0, -4) \\ \xrightarrow{\text{ext نسبی}} (-2, 0) \end{cases}$ $\xrightarrow[\text{از هم}]{\text{فاصله}} d = \sqrt{4 + 16} = \cancel{\sqrt{20}} = 2\sqrt{5}$

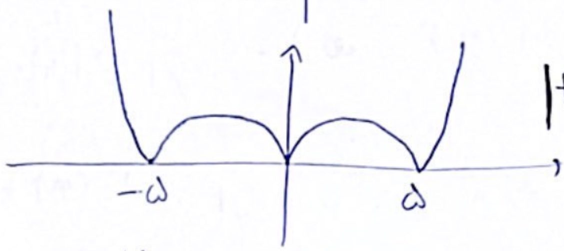
۲

۵

$f(x)=x^۲-۵|x| = |x|^۲-۵|x|$



$y=|f(x)|$



$\boxed{\frac{n}{m}=\frac{۳}{۲}}$ ۲

m: تعداد max نسبی $\leftarrow$ ۲

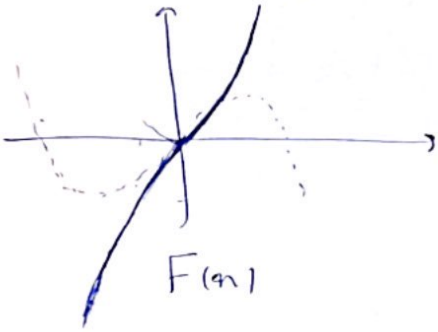
n: تعداد min نسبی $\leftarrow$ ۳

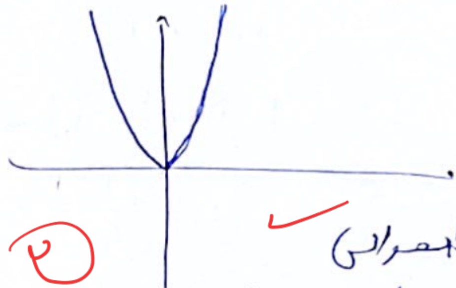
۶

$y=|f(x)|$

$f(x)=x(|x|+۳)$

$f(x)=\begin{cases} x^۲+۳x & x\geq ۰ \\ -x^۲+۳x & x<۰ \end{cases}$





۲ یک نقطه مرزی

۷

$\left\{\begin{array}{l} f(x)=\sqrt[۳]{x^۲}\,|x-a| \\ [۰, a] \\ \max \text{ مطلق } = ۱,۵ \\ F \\ a=? \end{array}\right.$ $\Rightarrow f(x)=\sqrt[۳]{x^۲}\cdot(-x+a)$

$$F'(x)=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}(-x+a)+(-۱)(\sqrt[۳]{x^۲})=\frac{-۲x+۲a-۳x}{۳\sqrt[۳]{x}}=\frac{-۵x+۲a}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$f'(x)=۰ \Rightarrow ۲a-۵x=۰ \Rightarrow ۵x=۲a \Rightarrow x=\frac{۲a}{۵}$

$\begin{cases} F(۰)=0 \\ F(a)=0 \\ F(\frac{۲a}{۵})=\sqrt[۳]{\frac{۴a^۲}{۲۵}}\times\frac{۳a}{۵}=\overrightarrow{\frac{۳}{۲}} \end{cases}$ مقدار max مطلق

$\Rightarrow a\sqrt[۳]{\frac{۴a^۲}{۲۵}}=\frac{۵}{۲} \Rightarrow a^۳\cdot\frac{۴a^۲}{۲۵}=\frac{۱۲۵}{۸}$

۲ $a^۵=\frac{۵^۵}{۳۲} \Rightarrow \boxed{a=\frac{۵}{۲}}$

۸

$F(x) = \sqrt{x|x| - x}$

m: max نسبی

n: min نسبی

K: نقاط بحرانی

$\frac{Km+n}{K-n} = ?$

$D_F: x|x| \geq x$; $x\geq 0$: $x^2 \geq x$, $x^2 - x \geq 0$ → $x \geq 1$, $x=0$; $x<0$: $-1 \leq x \leq 0$

$\Rightarrow D_F: [-1, 0] \cup [1, +\infty)$

$x \in [1, +\infty)$, $x=0$: $F(x) = \sqrt{x^2 - x} \Rightarrow F'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$

نقاط بحرانی: $x = \frac{1}{2}$ ✗ , $x = 0$ ✓ , $x = 1$ ✓

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$F'(x)$						$+$

$x \in [-1, 0]$: $F(x) = \sqrt{-x^2 - x}$

$\Rightarrow F'(x) = \frac{-2x-1}{2\sqrt{-x^2-x}}$

نقاط بحرانی: $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$ ✓ , $x = -1$ ✓

max نسبی

۱٫۷۵

-1		$-\frac{1}{2}$		0
	$+$	0	$-$	
		max نسبی		

$K = 3$

$m = 1$

$n = 0$

$\frac{Km+n}{K-n} = \frac{3}{3} = 1$

۹

$y = \frac{mx+2}{x-1+m} \Rightarrow y' = \frac{m(x+m-1) - (mx+2)}{(x+m-1)^2} = \frac{m^2 - m - 2}{(x+m-1)^2}$

$= \frac{(m-2)(m+1)}{(x+m-1)^2} \xrightarrow{\text{نزولی}} F'(x) \leq 0$; $(m-2)(m+1) \leq 0 \longrightarrow m \in [-1, 2]$

$m \neq 2$ ← طبق فرض

$m \neq -1$ ← زیرا آنگاه به ازای $x = 2$ عبارت ریشه مضاعف دارد و روی بازه $(1, +\infty)$ تعریف می‌شود.

$m = 0$, $m = 1$ ⟶ ۲ مقدار

۲

۱۰

$f(x) = \frac{x}{1 - x|x|}$; $f(x) = \begin{cases} x \geq 0, & \frac{x}{1-x^2} \\ x < 0, & \frac{x}{1+x^2} \end{cases}$

$F'(x) = \begin{cases} \frac{1 - x^2 + 2x^2}{(1-x^2)^2} & x \geq 0 \Rightarrow \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \\ \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} & x < 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \end{cases}$

۲

نقاط بحرانی: $F'(x) = 0$; $F'(x) =$ وجود ندارد

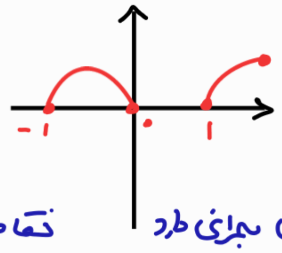
$\Rightarrow F'(-1) = 0$ ⟶ یک نقطه بحرانی

★ نقطه $x=1$ چون در دامنه نیست بحرانی محسوب نمی‌شود ★

$F'_+(0) = F'(0) = 1$ ⟶ پس نقطه صفر بحرانی نیست (مشتق وجود دارد)

۸

$$y = x|x| - x \begin{cases} x^2 - x & x \geq 0 \\ -x^2 - x & x \leq 0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{شکل تابع}$$



مینیمم نسبی ($n = 0$)

نقاط max نسبی ($m = 1$)

شکل ۴ نقطه‌ای بحرانی دارد ($k = 4$)

$$\frac{km + n}{k - n} = \frac{4 + 0}{4} = 1$$