(۱) هستی کرمی - دوازدهم تجربی (B) به نام خدا

$f(x) = 1 - \frac{a}{x}$

$[1, 3]$

آهنگ متوسط تغییر $= \frac{F(3) - F(1)}{2} = \frac{\cancel{1} - \frac{a}{3} - \cancel{1} + a}{2} =$

آهنگ لحظه‌ای تغییر: $F(x) = 1 - (a)(\frac{1}{x}) \Rightarrow F'(x) = -a(\frac{-1}{x^2}) \Rightarrow \frac{\frac{2a}{3}}{\frac{2}{1}} = \frac{a}{3}$

$\Rightarrow \frac{a}{x^2} = \frac{a}{3} \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \qquad F'(x) = \frac{a}{x^2}$

$\xrightarrow{[1,3]} x = +\sqrt{3}$

---

(۲)

$y = 2ax^2 - 5x + 18a$

$y = x$

برابری مشتق ها: $4ax - 5 = 1 \rightarrow 4ax = 6 \rightarrow x = \frac{6}{4a} = \frac{3}{2a} \Rightarrow x = y = \frac{3}{2a}$

برابری مقادیر تابع: $2ax^2 - 5x + 18a = x \Rightarrow 2ax^2 - 6x + 18a = 0 \Rightarrow ax^2 - 3x + 9a = 0$

$\Longrightarrow \Delta = 0: \quad 9 - 4(a)(9a) = 0 \Rightarrow 36a^2 = 9 \Rightarrow a^2 = \frac{9}{36} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = y = 3 \\ x = y = -3 \end{cases} \qquad \boxed{a = \pm\frac{1}{2}}$

---

(۳)

$y = x^3 - 12x + 2 = f(x)$

$y' = 3x^2 - 12 = f'(x)$

x		-2		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		max نسبی		min نسبی	

مقدار مینیمم نسبی $\Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 8 - 24 + 2 = -14$

---

(۴)

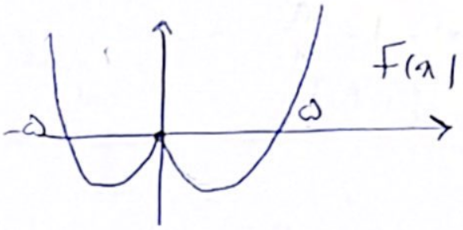
$y = x^3 + ax^2 - 2bx - 4 \longrightarrow y' = 3x^2 + 2ax - 2b$ در نقاط به طول صفر و -2 مشتق صفر است $y'(0) = -2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$

$\Rightarrow y'(-2) = 0 \Rightarrow 12 - 4a - \cancel{2b} = 0 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

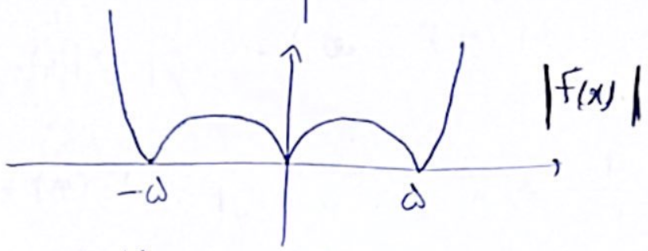
$\Rightarrow$ ضابطه تابع: $y = x^3 + 3x^2 - 4$ $\begin{cases} \xrightarrow{\text{ext نسبی}} (0, -4) \\ \xrightarrow{\text{ext نسبی}} (-2, 0) \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{فاصله از هم}} d = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

۵

$f(x) = x^{۲} - ۵|x| = |x|^{۲} - ۵|x|$



$y = |f(x)|$



$\boxed{\dfrac{n}{m} = \dfrac{۳}{۲}}$

m: تعداد max نسبی → ۲

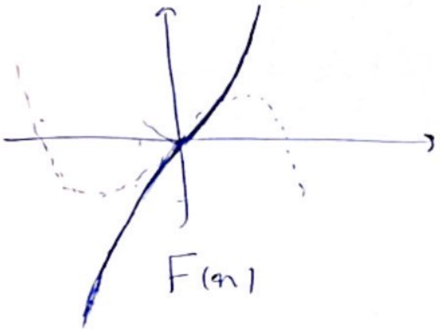
n: تعداد min نسبی → ۳

۶

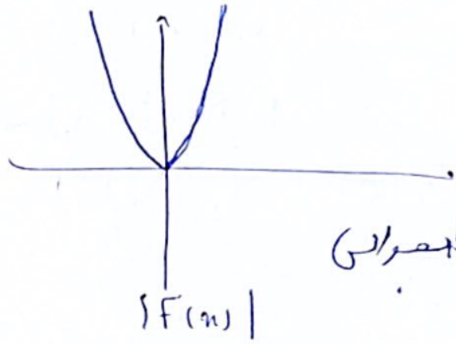
$y = |f(x)|$

$f(x) = x(|x| + ۳)$

$f(x) = \begin{cases} x^{۲} + ۳x & x \geq ۰ \\ -x^{۲} + ۳x & x < ۰ \end{cases}$



F(x)



یک نقطه بحرانی

|F(x)|

۷

$\begin{cases} f(x) = \sqrt[۳]{x^{۲}}\,|x-a| \\ [۰, a] \\ \max_{\text{مطلق}} F = ۱٫۵ \\ a = ? \end{cases} \Rightarrow f(x) = \sqrt[۳]{x^{۲}} \cdot (-x + a)$

$$F'(x) = \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}(-x + a) + (-1)(\sqrt[۳]{x^{۲}}) = \frac{-۲x + ۲a - ۳x}{۳\sqrt[۳]{x}} = \frac{-۵x + ۲a}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$F'(x) = ۰ \Rightarrow ۲a - ۵x = ۰ \Rightarrow ۵x = ۲a \Rightarrow x = \frac{۲a}{۵}$$

$a^{۵} = \dfrac{۵^{۵}}{۳۲} \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{۵}{۲}}$

$\begin{cases} F(۰) = ۰ \\ F(a) = ۰ \\ F\left(\frac{۲a}{۵}\right) = \sqrt[۳]{\frac{۴a^{۲}}{۲۵}} \times \frac{۳a}{۵} \overset{\text{مقدار max مطلق}}{=} \frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow a\sqrt[۳]{\frac{۴a^{۲}}{۲۵}} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow a^{۳} \cdot \frac{۴a^{۲}}{۲۵} = \frac{۱۲۵}{۸}$

۸

$F(x)=\sqrt{x|x|-x}$

m: max نسبی

n: min نسبی

K: نقاط بحرانی

$\frac{km+n}{k-n}=?$

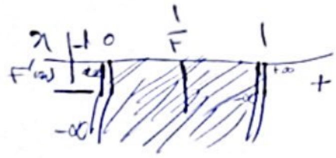
$D_F: \; x|x|\geq x \quad \xrightarrow{x\geq 0} x^2\geq x,\; x^2-x\geq 0 \to x\geq 1,\; x=0 \quad \xrightarrow{x<0} -1\leq x\leq 0$

$\Rightarrow D_F: [-1,0]\cup[1,+\infty)$

$x\in[1,+\infty),\; x=0: \; F(x)=\sqrt{x^2-x} \Rightarrow F'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$

نقاط بحرانی: $x=\frac{1}{2}$ ✗ ، $x=0$ ✓ ، $x=1$ ✓

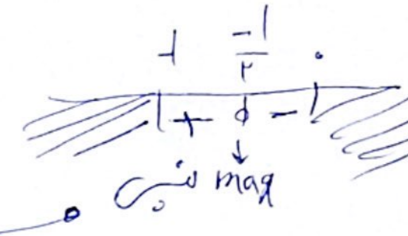
$x\in[-1,0]: \; F(x)=\sqrt{-x^2-x}$



$\Rightarrow F'(x)=\frac{-2x-1}{2\sqrt{-x^2-x}}$

نقاط بحرانی: $x=-\frac{1}{2}$ ، $x=0$ ✓ ، $x=-1$ ✓

max نسبی



$k=3$

$m=1$

$n=0$

$\frac{km+n}{k-n}=\frac{3}{3}=\boxed{1}$

۹

$y=\frac{mx+2}{x-1+m} \Rightarrow y'=\frac{m(x+m-1)-(mx+2)}{(x+m-1)^2}=\frac{m^2-m-2}{(x+m-1)^2}$

$=\frac{(m-2)(m+1)}{(x+m-1)^2} \xrightarrow{\text{نزولی}} F'(x)\leq 0 \quad (m-2)(m+1)\leq 0 \longrightarrow m\in[-1,2]$

طبق فرض ← $m\neq 2$

زیرا آنگاه به ازای $x=2$ عبارت ریشه مضاعف دارد و روی بازه $(1,+\infty)$ تعریف می‌شود. ← $m\neq -1$

$m=0$, $m=1$ → ۲ مقدار

۱۰

$f(x)=\frac{x}{1-x|x|} \qquad f(x)=\begin{cases} \frac{x}{1-x^2} & x\geq 0 \\ \frac{x}{1+x^2} & x<0 \end{cases}$

$F'(x)=\begin{cases} \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} & x\geq 0 \Rightarrow \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \\ \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} & x<0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \end{cases}$

نقاط بحرانی: $F'(x)=0$ ، $F'(x)$ وجود ندارد

$\Rightarrow F'(-1)=0 \longrightarrow$ نقطه بحرانی

$F'_+(0)=F'_-(0)=1 \longrightarrow$ هیچ نقطه‌ی بحرانی نیست (مشتق وجود دارد)

★ نقطه $x=1$ چون در دامنه نیست بحرانی محسوب نمی‌شود ★