۱۸

مهسا ناجی / تکلیف شماره ی ۲

①

$f(x) = 1 - \frac{a}{x}$ $\qquad [1, 3]$ $\qquad f'(x) = \frac{a}{x^2}$

۱/۷۵

آهنگ متوسط تغییر تابع $\Rightarrow \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{\cancel{1} - \frac{a}{3} - \cancel{1} + a}{2} = \frac{\frac{2a}{3}}{2} = \frac{a}{3}$

$\frac{\cancel{a}}{x^2} = \frac{\cancel{a}}{3} \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$x = -\sqrt{3}$ در بازه‌ی $[1, 3]$ قرار ندارد
پس $x = \sqrt{3}$ تنها قابل قبول است!

---

②

$y = 2ax^2 - 5x + 18a$ $\qquad$ نیمساز ناحیه سوم $\Rightarrow y = x \rightarrow \begin{vmatrix} A \\ A \end{vmatrix}$

$y' = 4ax - 5 \xrightarrow{\begin{vmatrix} A \\ 1 \end{vmatrix}} 1 = 4aA - 5 \rightarrow 6 = 4aA$ $\qquad$ شیب خط $= 1$

۱/۷۵

$\rightarrow A = \frac{3}{2a}$

اگر $a = \frac{1}{2}$ باشد ریشه‌ی عبارت مثبت می‌شود و در ناحیه سوم نمی‌افتد پس $a = -\frac{1}{2}$

$A = 2aA^2 - 5A + 18a \rightarrow \frac{3}{2a} = \cancel{2a} \times \frac{3}{\cancel{2a}} \times \frac{3}{2a} - 5 \times \frac{3}{2a} + 18a$

$\cancel{18}a = \frac{3}{2a} - \frac{9}{2a} + \frac{15}{2a} = \frac{9}{2a} \rightarrow 4a^2 = 1 \rightarrow a = \pm\frac{1}{2}$

---

③ مینیمم نسبی

$y = x^3 - 12x + 2$

$y' = 3x^2 - 12 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = +2 \,,\, x = -2$

x		-2		$+2$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	18	$\searrow$	-14	$\nearrow$

$\rightarrow x = +2 =$ مینیمم نسبی

۲

۴) اکسترمم نسبی $\rightarrow x=0 \,,\, x=-2$

$y=x^3+ax^2-2bx-4$

$y'=3x^2+2ax-2b$

$\xrightarrow[y'=0]{x=0} 0=-2b \rightarrow b=0$

$\xrightarrow[y'=0]{x=-2} 0=12-4a \rightarrow a=3$

$y=x^3+3x^2-4 \begin{cases} x=0 & y=-4 \\ x=-2 & y=0 \end{cases}$

۲

فاصله $= \overline{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

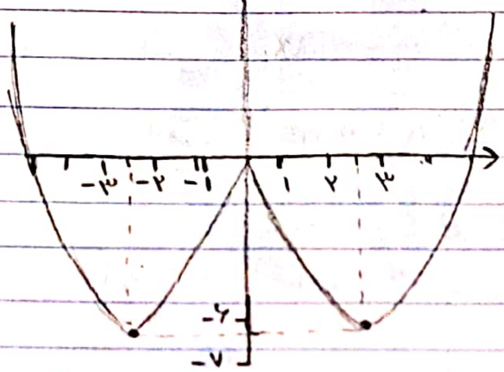
---

۵) $f(x)=x^2-5|x| \qquad y=|f(x)|$

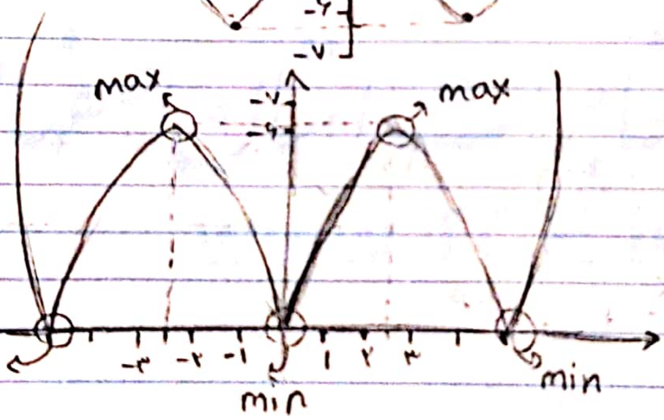
max نسبی $=m$

min نسبی $=n$

$f(x)\begin{cases} x^2-5x & x\geq 0 \\ x^2+5x & x<0 \end{cases}$



$y=|f(x)| \rightarrow$



$m=2$

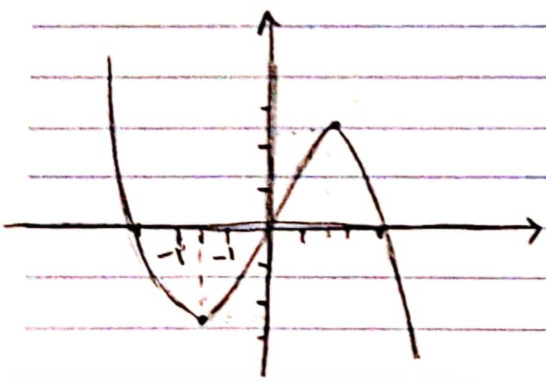
$n=3$

$\frac{n}{m}=\frac{3}{2}$

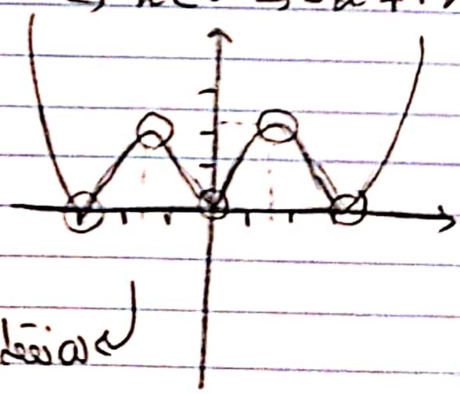
---

۶) $y=|f(x)| \qquad f(x)=x(|x|+3) \begin{cases} x\geq 0 \rightarrow x^2+3x \\ x<0 \rightarrow -x^2+3x \end{cases}$

۱،۴



$\xrightarrow{|f(x)|}$



۵ نقطه‌ی بحرانی

(۷) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\,|\underbrace{x-a}_{\ominus}|$ $[0,a]$ max مطلق $=0{,}75=\frac{3}{4}$

$f(x)=\sqrt[3]{x^2}(a-x) \rightarrow f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(a-x)+(-\sqrt[3]{x^2})=\frac{2a-5x}{3\sqrt[3]{x}} \rightarrow \frac{2a}{5}$, $\rightarrow 0$

0	a	$\frac{2a}{5}$
0	0	$\frac{3a}{5}\times\sqrt[3]{(\frac{2a}{5})^2}=\frac{3}{4}\rightarrow\frac{27}{8}=\frac{4a^2}{25}\times\frac{27a^3}{125}\Rightarrow\frac{4\times a^5}{25\times125}=\frac{1}{8}$

$a^5=\frac{25\times125}{8\times4}=\frac{5^5}{2^5}\rightarrow a=\frac{5}{2}=2{,}5$ (۲)

---

(۸) $f(x)=\sqrt{x|x|-x}$ $m=\max$ نسبی $k=$ بحرانی (۴،۷)

$n=\min$ نسبی $\frac{km+n}{k-n}\xrightarrow[m=1]{k=4,\,n=3}\frac{4+3}{1}=7$

$f(x)\begin{cases}\sqrt{x^2-x} & x\geq0\\ \sqrt{-x^2-x} & x<0\end{cases}$

$\hookrightarrow x^2-x\geq0\rightarrow x(x-1)\geq0\rightarrow \frac{0\ \ 1}{+|-|+}\Big\}\ n\rightarrow x\geq1 \rightarrow \frac{-b}{2a}=\frac{1}{2}$ ✗

min نسبی $=-1,0,1$ $\frac{-1}{2}$، ۰ ، ۱ ، ۱- داره را بحرانی

$\hookrightarrow -x^2-x\geq0\rightarrow -x(x+1)\geq0\rightarrow\frac{-1\ \ 0}{-|+|-}\Big\}\ n\rightarrow -1\leq x<0 \rightarrow \frac{-b}{2a}=-\frac{1}{2}$ ✓ $\rightarrow$ max نسبی

---

(۹) $y=\frac{mx+2}{x-1+m}\rightarrow(1,+\infty)$ نزولی $m\neq2$ (۱،۴)

$y'=\frac{m^2-m+2}{(x+m-1)^2}\rightarrow \frac{\ \ *\ \ }{+\,|\,+}$

$\hookrightarrow x+m-1=0\rightarrow x=1-m=1\rightarrow m=0$

۱۵

$$f(x)=\frac{x}{1-x|x|}$$

۱, ۴

$$f(x)\begin{cases}\dfrac{x}{1-x^{2}} & x\geq 0\\[2ex] \dfrac{x}{1+x^{2}} & x<0\end{cases}\longrightarrow f'(x)\begin{cases}\dfrac{x^{2}+1}{(1-x^{2})^{2}} & x\geq 0\\[2ex] \dfrac{1-x^{2}}{(1+x^{2})^{2}} & x<0\end{cases}$$

	-1		0		1	
$x\geq 0$:	+		−	−		+
$x<0$:	−		+	+		−

۱- و ۰ و ۱ = نقاط بحرانی

۹

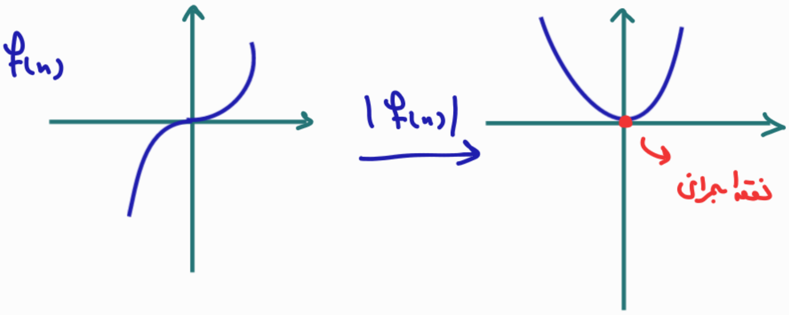
$f'(x)<0 \rightarrow m^{2}-m-2\leq 0 \rightarrow -1\leq m\leq 2$, $m\neq 2$ $\rightsquigarrow -1\leq m<2$ (1)

x (ریشه‌ی مخرج) $\rightarrow 1-m\leq 1 \rightarrow m\geq 0$ (2)

$1, 2 \rightsquigarrow$ $\boxed{m=0 \text{ یا } 1}$

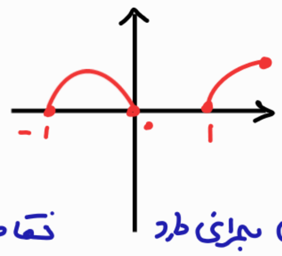
۶

$$f(x)=\begin{cases}x^2+3x & x\geq 0\\ -x^2+3x & x\leq 0\end{cases}\longrightarrow f'(x)=\begin{cases}2x+3 & x\geq 0\\ -2x+3 & x<0\end{cases}\qquad \boxed{f'_+(0)=f'_-(0)=3}$$



۸

$$y=x|x|-x\begin{cases}x^2-x & x\geq 0\\ -x^2-x & x\leq 0\end{cases}$$ ⇝ شکل تابع



مینیمم نسبی $(n=0)$

نقاط max نسبی $(m=1)$

شکل ۴ نقطه‌ی بحرانی دارد $(k=4)$

$$\frac{km+n}{k-n}=\frac{4+0}{4}=1$$

۱۰

$$y=\begin{cases}\dfrac{x}{1-x^2} & x\geq 0 \quad (x\neq 1)\\[2mm] \dfrac{x}{1+x^2} & x\leq 0\end{cases}\rightsquigarrow D_y=\mathbb{R}-\{1\}$$

$$y'=\begin{cases}\dfrac{1-x^2+2x^2}{1-x^2}=\dfrac{1+x^2}{1-x^2} & x>0\\[2mm] \dfrac{1+x^2-2x^2}{1-x^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2} & x<0\end{cases}\longrightarrow \boxed{x=-1}$$

تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر است و مشتق در یک صفر نیست پس تنها یک نقطه‌ی بحرانی $\underline{x=-1}$ دارد.