ریاضیات / تکلیف شماره ی ۲

①

$f(x)=1-\frac{a}{x}$ $\qquad [1,3]$ $\qquad f'(x)=\frac{a}{x^2}$

آهنگ متوسط تغییر تابع $\Rightarrow \frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{\cancel{1}-\frac{a}{3}-\cancel{1}+a}{2}=\frac{\frac{2a}{3}}{2}=\frac{a}{3}$

$\frac{\cancel{a}}{x^2}=\frac{\cancel{a}}{3} \to x^2=3 \to x=\pm\sqrt{3}$

---

②

$y=2ax^2-5x+18a$ $\qquad$ مماس در ناحیه سوم $\Rightarrow y=x \to \begin{vmatrix} A \\ A \end{vmatrix}$

$y'=4ax-5 \xrightarrow{\left|\begin{smallmatrix} A \\ 1 \end{smallmatrix}\right.} 1=4aA-5 \to 6=4aA$ $\qquad$ شیب خط $=1$

$\to A=\frac{3}{2a}$

$A=2aA^2-5A+18a \to \frac{3}{2a}=\cancel{2a}\times\frac{3}{\cancel{2a}}\times\frac{3}{2a}-5\times\frac{3}{2a}+18a$

$\overset{2}{\cancel{18}}a=\frac{3}{2a}-\frac{9}{2a}+\frac{15}{2a}=\frac{\cancel{9}}{2a} \to 4a^2=1 \to a=\pm\frac{1}{2}$

---

③

$y=x^3-12x+2$ $\qquad$ مینیمم نسبی

$y'=3x^2-12 \to 3x^2-12=0 \to x^2-4=0 \to x=+2 ,\ x=-2$

x		-2		$+2$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	18	$\searrow$	-14	$\nearrow$

$\to x=+2=$ مینیمم نسبی

۴) اکسترمم نسبی → $x=0$ و $x=-2$

$y = x^3 + ax^2 - 2bx - 4$

$y' = 3x^2 + 2ax - 2b$

$\xrightarrow[y'=0]{x=0} 0 = -2b \rightarrow b=0$

$\xrightarrow[y'=0]{x=-2} 0 = 12 - 4a \rightarrow a=3$

$y = x^3 + 3x^2 - 4 \begin{cases} x=0 & y=-4 \\ x=-2 & y=0 \end{cases}$

فاصله $= \overline{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

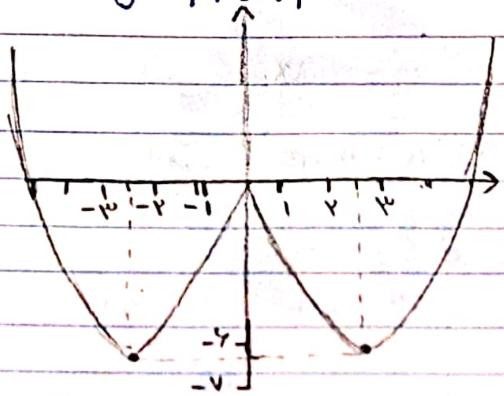
---

۵) $f(x) = x^2 - 5|x|$ $y = |f(x)|$

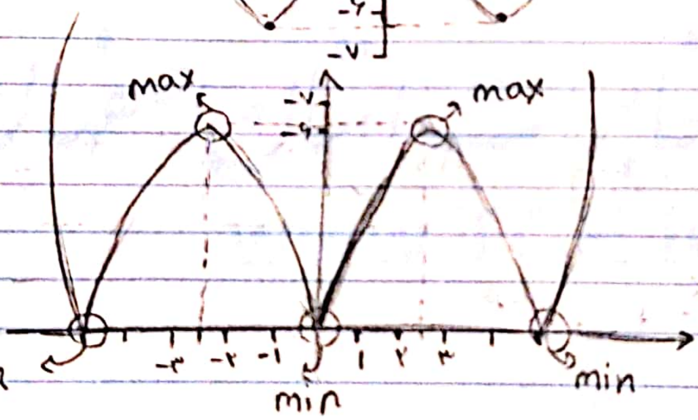
max نسبی $= m$

min نسبی $= n$

$f(x) \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 0 \\ x^2 + 5x & x < 0 \end{cases}$



$y = |f(x)| \rightarrow$

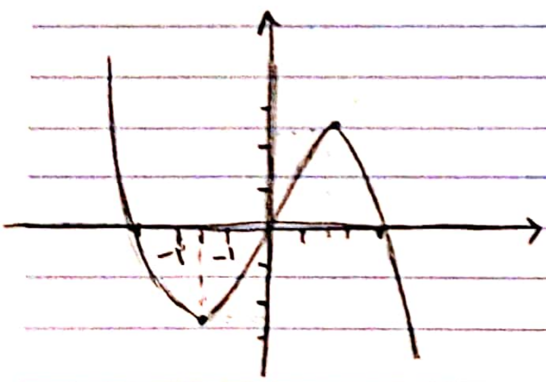


$m = 2$ $\frac{n}{m} = \frac{3}{2}$

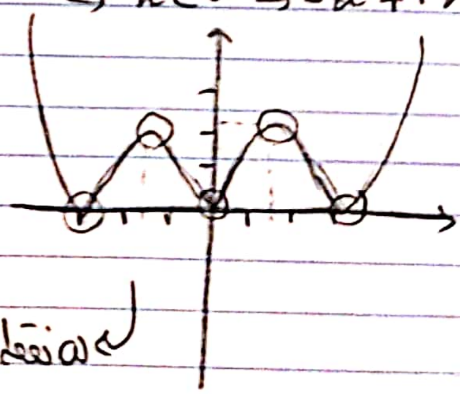
$n = 3$

---

۶) $y = |f(x)|$ $f(x) = x(|x| + 3)$ $\begin{cases} x \geq 0 \rightarrow x^2 + 3x \\ x < 0 \rightarrow -x^2 + 3x \end{cases}$



$\xrightarrow{|f(x)|}$



۵ نقطه‌ی بحرانی

۷

$f(x)=\sqrt[3]{x^2}\,\underbrace{|x-a|}_{-}$ $[0, a]$ max مطلق $=V\omega=\frac{3}{2}$

$f(x)=\sqrt[3]{x^2}(a-x)\to f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(a-x)+(-\sqrt[3]{x^2})=\frac{2a-5x}{3\sqrt[3]{x}}\to\frac{2a}{5}$, $\to 0$

0	a	$\frac{2a}{5}$
0	0	$\frac{3a}{5}\times\sqrt[3]{(\frac{2a}{5})^2}$

$\frac{3a}{5}\times\sqrt[3]{(\frac{2a}{5})^2}=\frac{3}{2}\to\frac{27}{8}=\frac{4a^2}{25}\times\frac{27a^3}{125}\Rightarrow\frac{4\times a^5}{25\times125}=\frac{1}{8}$

$a^5=\frac{25\times125}{8\times4}=\frac{5^5}{2^5}\to a=\frac{5}{2}=2/5$

۸

$f(x)=\sqrt{x|x|-x}$ $m=\max$ نسبی $k=$ بحرانی

$n=\min$ نسبی

$\frac{km+n}{k-n}\xrightarrow[m=1]{k=4,\ n=3}\frac{4+3}{1}=7$

$f(x)\begin{cases}\sqrt{x^2-x} & x\geq 0\\ \sqrt{-x^2-x} & x<0\end{cases}$

$\hookrightarrow x^2-x\geq 0\to x(x-1)\geq 0\to \frac{0\quad 1}{+\,|\,-\,|\,+}$ $\Big\}\ n\to x\geq 1\to\frac{-b}{2a}=\frac{1}{2}\times$

min نسبی $=-1, 0, 0, 1$ $-\frac{1}{2}$ و ۰ و ۱ و -1 را دارد = بحرانی

$\hookrightarrow -x^2-x\geq 0\to -x(x+1)\geq 0\to\left(\frac{-1\quad 0}{-\,|\,+\,|\,-}\right)$ $\Big\}\ n\to -1\leq x<0\to\frac{-b}{2a}=-\frac{1}{2}\checkmark\to$ max نسبی

۹

$y=\frac{mx+2}{x-1+m}\to(1, +\infty)$ نزولی $m\neq 2$

$y'=\frac{m^2-m+2}{(x+m-1)^2}\to\frac{\quad *\quad}{+\ |\ +}$

$\hookrightarrow x+m-1=0\to x=1-m=1\to m=0$

10

$$f(x) = \frac{x}{1 - x|x|}$$

$$f(x) \begin{cases} \dfrac{x}{1-x^2} & x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1+x^2} & x < 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{(1-x^2)^2} & x \geq 0 \\ \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & x < 0 \end{cases}$$

	-1	0	1	
+	-	-		+

	-1	0	1	
-	+	+		-

۱- و ۱ و ۰ = نقاط بحرانی