تکلیف شماره ۲۴ — پارمیس نبی زاده - دوازدهم دختر B

۱۹٫۲۵ آفرین

۱)

$x(1-|x|)\geq 0$

x		-1		0		1	
	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$D=(-\infty,-1]\cup[0,1]$

0	
$f=\sqrt{x+x^2}$	$f=\sqrt{x-x^2}$

$f'=\dfrac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}}$ → $x=\dfrac{-1}{2}$ غ ق ق ; $2\sqrt{x+x^2}$ → $x=-1,0$

$f'=\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$ → $x=\dfrac{1}{2}$; $2\sqrt{x-x^2}$ → $x=0,1$

x		-1		0		$0/5$		1	
y'	$-$	ت ن		ت ن	$+$	0	$-$	ت ن	
						max			

$K=\{-1,0,0/5,1\}$

$m=\{0/5\}$ $\quad n=\varnothing$

$m+n+K=1+0+4=5$ ✓

۲

۲)

$f'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{2}{2\sqrt{a-2x}}=\dfrac{\sqrt{a-2x}-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{a-2x}}$ → $x=0,\ \dfrac{a}{2}$; → $x=0,\ \dfrac{a}{2}$

۱٫۵

x		0		$\frac{a}{2}$	
y'		ت ن	$-$	ت ن	
		max		min	

$D_f=[0,\dfrac{a}{2}]$

$\max=\sqrt{a}$ $\qquad \min=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$

$\sqrt{a}\times\sqrt{\dfrac{a}{2}}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}=\sqrt{12}\Rightarrow a=2\sqrt{6}\simeq 4,\dots \qquad [a]=4$

۳)

-2		2
$f=\dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1}$	$f=\dfrac{-x^4+4x^2}{x^2-1}$	$f=\dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1}$
$f'=\dfrac{2x(x^4-2x^2+4)}{(x^2-1)^2}$ → 0 ; $(x^2-1)^2$ → ± 1	$f'=\dfrac{-2x(x^4-2x^2+4)}{(x^2-1)^2}$; $(x^2-1)^2$ → ± 1	$f'=\dfrac{2x(x^4-2x^2+4)}{(x^2-1)^2}$ → 0, $\Delta<0$; $(x^2-1)^2$ → ± 1

۱٫۷۵

$f'_+(2)=\dfrac{16}{3}$ $\qquad f'_-(2)=\dfrac{-16}{3}$ $\qquad$ مشتق ناپذیر $x=2$

$f'_+(-2)=\dfrac{16}{3}$ $\qquad f'_-(-2)=\dfrac{-16}{3}$ $\qquad$ مشتق ناپذیر $x=-2$

x		-2		-1		0		1		2	
y'	$-$		$+$	ت ن	$+$	0	$-$	ت ن	$-$		$+$
						max					

تابع در $x=0$ نقطه اکسترمم دارد ✓

ریشه‌های داخل قدر مطلق...

۴)

$f' = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(0) = 0 \Rightarrow f'(0) = c = 0$ $\qquad f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 0$ $\qquad f(1) = 1 \Rightarrow a + b = 1$

$a = -2 \quad b = 3$ $\qquad ab = -6$ $\quad$ ۲

۵)

$f = 3x - x^3$

$x = [-1.5, \sqrt{3}] \rightarrow 3 - x^2 \geqslant 0$

$f' = 3 - 3x^2 = 0 \qquad x = \pm 1$

x	-1.5		-1		$+1$		$\sqrt{3}$
y'		$-$	0	$+$		$-$	
			min		max		

۲

$x = -1 \rightarrow y = -2$ min مطلق $\qquad x = \sqrt{3} \rightarrow y = 0$

نقطه $(-1, -2)$ min مطلق است

۶)

$f(-1) = 1 \rightarrow y = 1 + 3a + b = 1$ $\qquad 3a + b = 0$

$f'(-1) = 0$ $\qquad f' = -3x^2 + 6ax \rightarrow -3 - 6a = 0$ $\quad$ ۲

$a = \frac{-1}{2} \qquad b = \frac{3}{2}$ $\qquad \frac{b}{a} = -3$

۷)

$f = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{6} \rightarrow f' = 3x + 1 = 0 \qquad x = \frac{-1}{3} \qquad y = \frac{2}{3}$

$y = \frac{ax + 3}{(a+1)x + a - 1}$ $\qquad$ I مجانب $\rightarrow x = \frac{1-a}{a+1} = \frac{-1}{3}$

II مجانب $\rightarrow y = \frac{a}{a+1} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 2$

$y = \frac{2x + 3}{3x + 1} = 0$ $\quad$ ۲ $\quad x = \frac{-3}{2}$ $\qquad$ نمودار در نقطه $(\frac{-3}{2}, 0)$ محور xها را می‌برد

۸)

مجانب $= x = \frac{-1}{2} \Rightarrow$ مخرج $= 4(x + \frac{1}{2})^2 = 4x^2 + 4x + 1$

$\Rightarrow a = 4$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 3 = \frac{bx^2}{4x^2}$ $\qquad b = 12$ $\quad$ ۲ $\qquad \frac{b}{a} = 3$

۹)

$$f' = \frac{4x^3(x^3-8) - 3x^2(x^4)}{(x^3-8)^2} = \frac{x^6 - 32x^3}{(x^3-8)^2}$$

$\to x = 0 , \sqrt[3]{32}$

$\to x = 2$

$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

x		0		2		$\sqrt[3]{32}$	
y'	$+$	0	$-$	▨	$-$	0	$+$

۲

تابع در $[0 , 2) \cup (2 , \sqrt[3]{32}]$ اکیداً نزولی است

$1/17 \simeq$ طول بازه ← طول بازه $= 2$

کمترین طول بازه $= \sqrt[3]{32} - 2$

۱۰)

$D_f = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{3}\}$

$$f' = \frac{4x^3(x^2-3) - 2x(x^4-3)}{(x^2-3)^2} = \frac{2x(x^4-6x^2+3)}{(x^2-3)^2}$$

$2x \to 0$ ، $(x^2-3)^2 \to \pm\sqrt{3}$

$x^4 - 6x^2 + 3 = 0 \qquad x^2 = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{2} = 3 \pm \sqrt{6} \qquad x = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{6}}$

x		$-\sqrt{3+\sqrt{6}}$		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{3-\sqrt{6}}$		0		$\sqrt{3-\sqrt{6}}$		$\sqrt{3}$		$\sqrt{3+\sqrt{6}}$	
y'	$-$	0	$+$	▨	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	▨	$-$	0	$+$

$(-2 , 2)$

۲

در این بازه، ۳ بازه اکیداً نزولی داریم

$$\left[-\sqrt{3-\sqrt{6}} , 0\right] \cup \left[\sqrt{3-\sqrt{6}} , \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3} , 2\right)$$

۳ـ

$$f(x) = \pm \frac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} \longrightarrow f'(x) = \pm \frac{(4x^3-8x)(x^2-1) - (x^4-4x^2)2x}{(x^2-1)^2} = 0$$

$$\pm(2x^5 - 4x^3 + 8x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\hookrightarrow x^4 - 2x^2 + 4 = 0 \quad (\text{ریشه ندارد})$$

ضمناً ۲, ۲ـ ریشه‌های قدرمطلق و نقطه‌ی صفر ریشه‌ی مشترک است پس 3 نقطه‌ی بحرانی دارد!

۴

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{a-2x} \longrightarrow D_f \quad 0 \le x \le \frac{a}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{2\sqrt{a-2x}} \xrightarrow{f'=0} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{a-2x}} \rightarrow 4x = a - 2x \rightsquigarrow x = \frac{a}{6}$$

$$x = 0 \longrightarrow f(0) = \sqrt{a}$$

$$x = \frac{a}{2} \longrightarrow f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$$ min نسبی

$$x = \frac{a}{6} \longrightarrow f\left(\frac{a}{6}\right) = \sqrt{\frac{a}{6}} + \sqrt{\frac{4a}{6}} = \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{6}}$$ max نسبی

min x max

$$\frac{3 \times a}{\sqrt{12}} = \sqrt{12}$$

$$\hookrightarrow \boxed{a = 4}$$