پارمیس نبی زاده - دوازدهم دختر B — تکلیف شماره ۲۴

(۱)

$x(1-|x|) \geq 0$

	-1		0		1	
$+$		$-$		$+$		$-$

$D=(-\infty,-1]\cup[0,1]$

$x<0$	$x\geq 0$
$f=\sqrt{x+x^2}$	$f=\sqrt{x-x^2}$
$f'=\dfrac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}}$, $1+2x \to x=\dfrac{-1}{2}$ (غ ق ق), $2\sqrt{x+x^2} \to x=-1,0$	$f'=\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$, $1-2x \to x=\dfrac{1}{2}$, $2\sqrt{x-x^2} \to x=0,1$

x		-1		0		$0/5$		1	
y'	$-$				$+$		$-$		
						max			

$K=\{-1,0,0/5,1\}$ $m=\{0/5\}$ $n=\varnothing$

$m+n+K=1+0+4=5$

(۲)

$f'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{2\cdot 1}{2\sqrt{a-2x}}=\dfrac{\sqrt{a-2x}-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\,\sqrt{a-2x}}$ $\to x=0,\ \dfrac{a}{2}$; $\to x=0,\ \dfrac{a}{2}$

x		0		$\frac{a}{2}$	
y'			$-$		
		max		min	

$D_f=[0,\dfrac{a}{2}]$

$\max=\sqrt{a}$ $\min=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$

$\sqrt{a}\times\sqrt{\dfrac{a}{2}}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}=\sqrt{12} \Rightarrow a=2\sqrt{6}\simeq 4,\dots$ $[a]=4$

(۳)

$x<-2$	$-2<x<2$	$x>2$
$f=\dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1}$	$f=\dfrac{-x^4+4x^2}{x^2-1}$	$f=\dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1}$
$f'=\dfrac{2x(x^4-2x^2+4)}{(x^2-1)^2}$ $\to 0$, $(x^2-1)^2 \to \pm1$	$f'=\dfrac{-2x(x^4-2x^2+4)}{(x^2-1)^2}$, $\to \pm1$	$f'=\dfrac{2x(x^4-2x^2+4)}{(x^2-1)^2}$ $\to 0$, $\Delta<0$, $\to \pm1$

$f'_+(2)=\dfrac{16}{3}$ $f'_-(2)=\dfrac{-16}{3}$ مشتق ناپذیر $x=2$

$f'_+(-2)=\dfrac{16}{3}$ $f'_-(-2)=\dfrac{-16}{3}$ مشتق ناپذیر $x=-2$

x		-2		-1		0		1		2	
y'	$-$		$+$		$+$		$-$		$-$		$+$
						max					

تابع در $x=0$ نقطه اکسترمم دارد

(۴

$f' = ۳ax^۲ + ۲bx + c$

$f'(۰) = ۰ \Rightarrow f'(۰) = c = ۰$ $\qquad$ $f(۰) = ۰ \Rightarrow d = ۰$

$f'(۱) = ۰ \Rightarrow ۳a + ۲b = ۰$ $\qquad$ $f(۱) = ۱ \Rightarrow a + b = ۱$

$a = -۲ \qquad b = ۳ \qquad ab = -۶$

(۵

$f = ۳x - x^۳$

$x = [-۱/۵, \sqrt{۳}] \to ۳ - x^۲ \geq ۰$

$f' = ۳ - ۳x^۲ = ۰ \qquad x = \pm ۱$

x	$-۱/۵$		-۱		$+۱$		$\sqrt{۳}$
y'		$-$	۰	$+$		$-$	
			min		max		

$x = -۱ \to y = -۲$ min مطلق $\qquad$ $x = \sqrt{۳} \to y = ۰$ $\qquad$ نقطه $(-۱, -۲)$ min مطلق است

(۶

$f(-۱) = ۱ \to y = ۱ + ۳a + b = ۱ \qquad ۳a + b = ۰$

$f'(-۱) = ۰ \qquad f' = -۳x^۲ + ۶ax \to -۳ - ۶a = ۰$

$a = \frac{-۱}{۲} \qquad b = \frac{۳}{۲} \qquad \frac{b}{a} = -۳$

(۷

$f = \frac{۳}{۲}x^۲ + x + \frac{۵}{۶} \to f' = ۳x + ۱ = ۰ \qquad x = \frac{-۱}{۳} \qquad y = \frac{۲}{۳}$

$y = \frac{ax + ۳}{(a+۱)x + a - ۱}$

I مجانب $\to x = \frac{۱ - a}{a + ۱} = \frac{-۱}{۳}$

II مجانب $\to y = \frac{a}{a + ۱} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow a = ۲$

$y = \frac{۲x + ۳}{۳x + ۱} = ۰ \qquad x = \frac{-۳}{۲}$ نمودار در نقطه $(\frac{-۳}{۲}, ۰)$ محور xها را می‌برد

(۸

مجانب $= x = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow$ مخرج $= ۴(x + \frac{۱}{۲})^۲ = ۴x^۲ + ۴x + ۱$

$\Rightarrow a = ۴$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = ۳ = \frac{bx^۲}{۴x^۲} \qquad b = ۱۲ \qquad \frac{b}{a} = ۳$

۹)

$$f' = \frac{۴x^۳(x^۳-۸) - ۳x^۲(x^۴)}{(x^۳-۸)^۲} = \frac{x^۶ - ۳۲x^۳}{(x^۳-۸)^۲}$$

$x = ۰, \sqrt[۳]{۳۲}$

$x = ۲$ ← ریشه مخرج

$D_f = \mathbb{R} - \{۲\}$

x		۰		۲		$\sqrt[۳]{۳۲}$	
y'	+	۰	−	‖	−	۰	+

تابع در $[\sqrt[۳]{۳۲}, ۲) \cup (۲, ۰]$ اکیداً نزولی است.

طول بازه $= ۲$ ← طول بازه $\simeq ۱/۱۷$

بیشترین طول بازه $= \sqrt[۳]{۳۲} - ۲$

۱۰)

$D_f = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{۳}\}$

$$f' = \frac{۴x^۳(x^۲-۳) - ۲x(x^۴-۳)}{(x^۲-۳)^۲} = \frac{۲x(x^۴-۶x^۲+۹)}{(x^۲-۳)^۲}$$

$x = ۰$

$\pm\sqrt{۳}$ ← ریشه مخرج

$x^۴ - ۶x^۲ + ۹ = ۰$ $\quad x^۲ = \frac{۶ \pm \sqrt{۳۶}}{۲} = ۳ \pm \sqrt{۶}$ $\quad x = \pm\sqrt{۳ \pm \sqrt{۶}}$

x		$-\sqrt{۳+\sqrt{۶}}$		$-\sqrt{۳}$		$-\sqrt{۳-\sqrt{۶}}$		۰		$\sqrt{۳-\sqrt{۶}}$		$\sqrt{۳}$		$\sqrt{۳+\sqrt{۶}}$	
y'	−	۰	+	‖	+	۰	−	۰	+	۰	−	‖	−	۰	+

$(-۲, ۲)$

در این بازه، ۳ بازه اکیداً نزولی داریم

$$[-\sqrt{۳-\sqrt{۶}}, ۰] \cup [\sqrt{۳-\sqrt{۶}}, \sqrt{۳}) \cup (\sqrt{۳}, ۲)$$