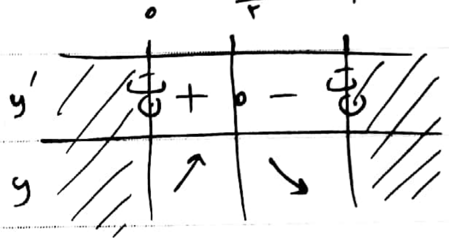
نیکی بابایی — تکلیف شماره ۲۶

۱ـ $f(x) = \sqrt{x(1-|x|)}$ ۱۹٫۲۵ ۱٫۷۵

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-x^2} & x \geq 0 \quad D_f = [0, 1] \xrightarrow{\cap} \boxed{0 \leq x \leq 1} \\ \sqrt{x+x^2} & x \leq 0 \quad D_f = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty) \xrightarrow{\cap} \boxed{(-\infty, -1]} \end{cases}$$

$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}} \\ \dfrac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}} = 0 \rightarrow x = \frac{-1}{2} \end{cases}$

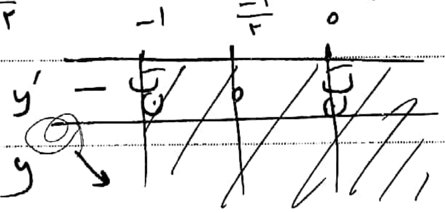
$x = \frac{1}{2}$: ق ق — Max نسبی



Min نسبی ندارد ✓

✓ $x = 0, 1, \frac{1}{2}$ ← نقاط بحرانی

$x = \frac{-1}{2}$ غ ق ق ← در بازه‌ی $(-\infty, -1]$ قرار ندارد.



$\boxed{x = -1}$ ← نقطه بحرانی

→ Max و Min نسبی ندارد ✓

$$k + m + n = 4{,}5 \quad \text{جواب} \qquad \begin{cases} \text{تعداد کل نقاط بحرانی} = K = 4 \\ \text{Max نسبی} = m = \frac{1}{2} \\ \text{Min نسبی} = n = \text{ندارد} \end{cases}$$

۲ـ $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{a-2x}$ $\quad \left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ x \leq \frac{a}{2} \end{matrix}\right\} \rightarrow D_f = [0, \frac{a}{2}]$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-2}{\cancel{2}\sqrt{a-2x}} = \frac{\sqrt{a-2x} - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{a-2x}}$$

کتابت

$$f'(x)=0 \rightarrow \sqrt{a-2x}-2\sqrt{x}=0 \rightarrow \sqrt{a-2x}=2\sqrt{x}$$

$$\rightarrow a-2x=4x \rightarrow 6x=a \rightarrow \boxed{x=\frac{a}{6}}$$

$$\begin{cases} x=0 \rightarrow f(x)=\sqrt{a} \\ x=\frac{a}{2} \rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{a}{2}} \rightarrow f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a} \\ x=\frac{a}{6} \rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{a}{6}}+\sqrt{\frac{2a}{3}} \rightarrow f(x)=\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{a} \end{cases}$$

$$Max \times Min=\sqrt{12} \rightarrow \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}\sqrt{a} \times \frac{\cancel{\sqrt{6}}}{2}\sqrt{a}=\cancel{\sqrt{12}}$$

$$\frac{a}{4}=1 \rightarrow \boxed{a=4} \rightarrow [a]=4$$

ب

جواب

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}\left|x^2-4\right|$$ ـ۳

۱۷۵

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} & D_f=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty) \\ \frac{x^2(4-x^2)}{x^2-1} & D_f=[-2,2]-\{\pm 1\} \end{cases}$$

$\Delta<0$ و همواره مثبت

$$f'(x)=\frac{2x^5-4x^3+8x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x(x^4-2x^2+4)}{(x^2-1)^2}$$

x		-1^*		0		1^*	
y'	$-$	ت.ن	$-$	0	$+$	ت.ن	$+$
y	↘		↘		↗		↗

$x=0$ مینیمم $\rightarrow$

در بازه $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ قرار ندارد

تکالیف

$$\frac{-2x^5+4x^3-8x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x(x^4-2x^2+4)}{(x^2-1)^2}$$

x		-1^*		0		1^*	
y'	$+$	ت ن	$+$	0	$-$	ت ن	$-$
y	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

$\boxed{x=0}$ ماکس $\rightarrow$ در بازه‌ی $[-2,2]$ قرار دارد

← پس تابع در مجموعه A اکسترمم نسبی دارد ✓

۴- نقاط اکسترمم نسبی $\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$

$y = ax^3+bx^2+cx+d$

$f(0)=0$ $\quad f(1)=1 \longrightarrow \boxed{a+b+c=1}$

$\hookrightarrow \boxed{d=0}$ $\qquad \boxed{a+b=1}$

$f'(0)=0 \quad f'(1)=0 \qquad y'=3ax^2+2bx+c$

$\hookrightarrow \boxed{c=0}$ $\qquad \hookrightarrow \begin{cases} 3a+2b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \cancel{3a}+2b=0 \\ \cancel{-3a}-3b=-3 \end{cases}$

$\boxed{b=3}$ $\quad \boxed{a=-2}$

$ab = \cancel{-6}$ جواب ۲

۵- $f(x)=x|3-x^2|$

$$f(x)=\begin{cases} 3x-x^3 & [-\sqrt{3},\sqrt{3}] \\ x^3-3x & (-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty) \end{cases}$$

نیکنام بهاره

$$f'(x) = \begin{cases} 3 - 3x^2 = 0 \longrightarrow \boxed{x = \pm 1} \\ 3x^2 - 3 = 0 \longrightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

غ ق ق در بازه $[\sqrt{3}, +\infty) \cup (-\infty, -\sqrt{3}]$ قرار ندارد

$$\begin{cases} x = 1 \longrightarrow f(x) = 2 \\ x = -1 \longrightarrow f(x) = -2 \longrightarrow -2 = \text{Min} \\ x = \sqrt{3} \longrightarrow f(x) = 0 \\ x = -1{,}5 \longrightarrow f(x) = \frac{-9}{8} \end{cases}$$

جواب

مطلق تابع

2

۴ــ

$$y = x^2|x| + 3ax^2 + b \xrightarrow{x = -1}$$

$$y = -x^3 + 3ax^2 + b$$

$$y' = -3x^2 + 6ax \longrightarrow f'(-1) = 0$$

$$\longrightarrow -3 - 6a = 0 \longrightarrow \boxed{a = \frac{-1}{2}}$$

$$f(-1) = 1 \longrightarrow -(-1)^3 + 3\left(\frac{-1}{2}\right)(-1)^2 + b = 1$$

$$1 - \frac{3}{2} + b = 1 \longrightarrow \boxed{b = \frac{3}{2}}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} = -3$$ جواب

2

نیکاسایت

۷ـ $y=\frac{3}{2}x^2+x+\frac{5}{4} \longrightarrow Min \Big| \frac{-b}{2a}=\frac{-1}{3}$

$\frac{2}{3}$

$y=\frac{ax+3}{(a+1)x+(a-1)} \longrightarrow$ مجانب قائم : $x=\frac{1-a}{1+a}$

$\longrightarrow$ مجانب افقی $y=\frac{a}{a+1}$

$$\begin{cases} \frac{1-a}{1+a}=\frac{-1}{3} \longrightarrow 3-3a=-1-a \\ \qquad 2a=4 \longrightarrow \boxed{a=2} \\ \frac{a}{a+1}=\frac{2}{3} \longrightarrow 3a=2a+2 \end{cases}$$

۲

$y=\frac{2x+3}{3x+1}=0 \longrightarrow x=\frac{-3}{2}$ جواب

۸ـ $y=\frac{bx^2+7}{4x^2+ax+1} \qquad \Big| \frac{-1}{2} \quad 3$

مجانب افقی $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{b}{4}=3 \longrightarrow \boxed{b=12}$

مجانب قائم $\longrightarrow$ ریشهٔ مخرج $4\left(\frac{-1}{2}\right)^2+a\left(\frac{-1}{2}\right)+1=0$

$1+1-\frac{a}{2}=0 \longrightarrow \boxed{a=4}$

$\frac{b}{a}=3$

جواب

۲

تکالیف ب

۹ـ

$$y=\frac{x^4}{x^3-8}\longrightarrow y'=\frac{4x^3(x^3-8)-(3x^2)(x^4)}{(x^3-8)^2}$$

$$y'=\frac{4x^6-32x^3-3x^6}{(x^3-8)^2}\longrightarrow y'=\frac{x^6-32x^3}{(x^3-8)^2}$$

$$y'=\frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2}$$

		0		2^*		$\sqrt[3]{32}$	
y'	$+$		$-$	$\nexists$	$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

بازه هایی که تابع در آن نزولی است $\longrightarrow (0,2)\ ,\ (2,\sqrt[3]{32})$

Min طول این بازه ها $\longrightarrow$ ۲ $\boxed{\sqrt[3]{32}-2}$ جواب

۱۰ـ

$$f(x)=\frac{x^4-3}{x^2-3}\qquad x\in(-2,2)$$

$$f'(x)=\frac{4x^3(x^2-3)-(2x)(x^4-3)}{(x^2-3)^2}$$

ریشه‌ها: $3\pm\sqrt{6}$

$$f'(x)=\frac{2x^5-12x^3+6x}{(x^2-3)^2}\longrightarrow\frac{2x(x^4-6x^2+3)}{(x^2-3)^2}$$

۱/۵

	-2	$-\sqrt{3}$	0	$3-\sqrt{6}$	$\sqrt{3}$	2^*	$\sqrt{6}+3$
y'	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$		
y	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$		

$\longrightarrow$ در ۴ بازه اکیدا نزولی است.

$$f(x) = \pm \frac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} \longrightarrow f'(x) = \pm \frac{(4x^3-8)(x^2-1) - (x^4-4x^2)2x}{(x^2-1)^2} = 0$$ ـ۳

$\pm(2x^5 - 4x^3 + 8x) = 0 \rightarrow x = 0$

$\hookrightarrow x^4 - 2x^2 + 4 = 0$ (ریشه ندارد)

نقاط ۲,۲- ریشه‌های تک معلق و نقطه‌ی ۱- صفر ریشه‌ی مشترک است پس 3 نقطه‌ی بحرانی دارد!

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2-3) - 2x(x^4-3)}{(x^2-3)^2} = \frac{2x[(2x^4-6x^2) - (x^4-3)]}{(x^2-3)^2}$$ ۱۰

$2x^5 - 12x^3 + 6x = 0 \longrightarrow 2x(x^4 - 6x^2 + 3) = 0 \rightarrow x = 0$

$\hookrightarrow x^2 = t$

$t^2 - 6t + 3 = 0 \longrightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{2} \longrightarrow x = \pm\sqrt{3-\sqrt{6}}$

$-2 < x < 2$

-2		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{3-\sqrt{6}}$		0		$\sqrt{3-\sqrt{6}}$		$\sqrt{3}$	
	$-$		$-$		$+$		$-$		$+$		$+$

در ۳ بازه اکیداً نزولی است!

$x(1-|x|) \geq 0 \rightarrow D_f = (-\infty, -1] \cup [0, 1]$ ـ۱

$f'(x) = \frac{1-2|x|}{2\sqrt{x(1-|x|)}} \longrightarrow |x| = \frac{1}{2} \longrightarrow x = \frac{1}{2}$ ($x = -\frac{1}{2}$ در دامنه نیست)

x		$\frac{1}{2}$	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$	max	$\searrow$

$n = 0$

$m = 1$

$m + n + k = 4 + 1 = 5$

نقاط ± 1 , 0 و $\frac{1}{2}$ بحرانی $\leftarrow k = 4$