۱ـ $f(x) = \sqrt{x(1-|x|)}$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-x^2} & x \geq 0 \quad D_f = [0, 1] \xrightarrow{\cap} \boxed{0 \leq x \leq 1} \\ \sqrt{x+x^2} & x < 0 \quad D_f = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty) \xrightarrow{\cap} \boxed{(-\infty, -1]} \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}} \quad \text{ق ق}$$

Max نسبی

x	0		$\frac{1}{2}$		1
y'	ت ن	$+$	0	$-$	ت ن
y		↗		↘	

Min نسبی ندارد ✓

✓ $x = 0, 1, \frac{1}{2}$ ← نقاط بحرانی

$$\frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}} = 0 \rightarrow x = \frac{-1}{2} \quad \text{غ ق ق} \rightarrow$$ در بازه $(-\infty, -1]$ قرار ندارد.

x		-1		$\frac{-1}{2}$		0
y'	$-$	ت ن		0		ت ن
y	↘					

→ Max و Min نسبی ندارد ✓

$\boxed{x=-1}$ ← نقطه بحرانی

$$k+m+n = 4{,}5 \quad \text{جواب}$$

تعداد کل نقاط بحرانی $= K = 4$

Max نسبی $= m = \frac{1}{2}$

Min نسبی $= n =$ ندارد

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{a-2x} \qquad \left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ x \leq \frac{a}{2} \end{matrix}\right\} \rightarrow D_f = \left[0, \frac{a}{2}\right]$$ ـ۲

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-2}{\cancel{2}\sqrt{a-2x}} = \frac{\sqrt{a-2x} - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{a-2x}}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow \sqrt{a-2x}-2\sqrt{x}=0 \rightarrow \sqrt{a-2x}=2\sqrt{x}$$

$$\rightarrow a-2x=4x \rightarrow 6x=a \rightarrow \boxed{x=\frac{a}{6}}$$

$$\begin{cases} x=0 \rightarrow f(x)=\sqrt{a} \\ x=\frac{a}{2} \rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{a}{2}} \rightarrow f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a} \\ x=\frac{a}{6} \rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{a}{6}}+\sqrt{\frac{2a}{3}} \rightarrow f(x)=\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{a} \end{cases}$$

$$Max \times Min=\sqrt{12} \rightarrow \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}\sqrt{a} \times \frac{\cancel{\sqrt{6}}}{2}\sqrt{a}=\cancel{\sqrt{12}}$$

$$\frac{a}{4}=1 \rightarrow \boxed{a=4} \rightarrow [a]=4$$

جواب

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}\left|x^2-4\right|$$ ۳ـ

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} & D_f=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty) \\ \dfrac{x^2(4-x^2)}{x^2-1} & D_f=[-2,2]-\{\pm 1\} \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^5-4x^3+8x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{2x(x^4-2x^2+4)}{(x^2-1)^2} \\ \end{cases}$$

$\Delta<0$ و همواره مثبت

x		-1*		0		1*	
y'	$-$	ت ن	$-$	0	$+$	ت ن	$+$
y	↘		↘		↗		↗

$x=0$ غ ق ق →

در بازهٔ $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ قرار ندارد

$$\frac{-2x^5+4x^3-8x}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x(x^4-2x^2+4)}{(x^2-1)^2}$$

	-1^*		0		1^*	
y'	+	ت ن	+	0	−	ت ن	−
y	↗		↗		↘		↘

$\boxed{x=0}$ در بازه $[-2,2]$ نقطه اکسترمم نسبی دارد

← پس تابع در مجموع ۱ اکسترمم نسبی دارد ✓

۴ـ $\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$ نقاط اکسترمم نسبی $y=ax^3+bx^2+cx+d$

$f(0)=0$ $f(1)=1 \longrightarrow \boxed{a+b+c=1}$

$\hookrightarrow \boxed{d=0}$

$\boxed{a+b=1}$

$f'(0)=0$ $f'(1)=0$ $y'=3ax^2+2bx+c$

$\hookrightarrow \boxed{c=0}$ $\hookrightarrow \begin{cases}3a+2b=0\\ a+b=1\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\cancel{3a}+2b=0\\ \cancel{-3a}-3b=-3\end{cases}$

$\boxed{b=3}$ $\boxed{a=-2}$

$ab=-6$ جواب

۵ـ $f(x)=x|3-x^2|$

$$f(x)=\begin{cases}3x-x^3 & [-\sqrt{3},\sqrt{3}]\\ x^3-3x & (-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)\end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3 - 3x^2 = 0 \longrightarrow \boxed{x = \pm 1} \\ 3x^2 - 3 = 0 \longrightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

غ ق ق در $x=\pm 1$ ، بازه $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$ قرار ندارد

$$\begin{cases} x = 1 \longrightarrow f(x) = 2 \\ x = -1 \longrightarrow f(x) = -2 \longrightarrow -2 = \text{Min} \\ x = \sqrt{3} \longrightarrow f(x) = 0 \\ x = -1{,}5 \longrightarrow f(x) = \frac{-9}{8} \end{cases}$$

جواب

مطلق تابع

6_

$$y = x^2|x| + 3ax^2 + b \xrightarrow{x=-1}$$

$$y = -x^3 + 3ax^2 + b$$

$$y' = -3x^2 + 6ax \longrightarrow f'(-1) = 0$$

$$\longrightarrow -3 - 6a = 0 \longrightarrow \boxed{a = \frac{-1}{2}}$$

$$f(-1) = 1 \longrightarrow -(-1)^3 + 3\left(\frac{-1}{2}\right)(-1)^2 + b = 1$$

$$1 - \frac{3}{2} + b = 1 \longrightarrow \boxed{b = \frac{3}{2}}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} = -3$$ جواب

۷ـ $y=\frac{۳}{۲}x^{۲}+x+\frac{۵}{۶} \longrightarrow \text{Min} \quad \frac{-b}{۲a}=\frac{-۱}{۳}$

$\frac{۲}{۳}$

$y=\frac{ax+۳}{(a+۱)x+(a-۱)} \longrightarrow$ مجانب قائم $: \; x=\frac{۱-a}{۱+a}$

$\longrightarrow$ مجانب افقی $\; y=\frac{a}{a+۱}$

$$\begin{cases} \frac{۱-a}{۱+a}=\frac{-۱}{۳} \longrightarrow ۳-۳a=-۱-a \\ \qquad ۲a=۴ \longrightarrow \boxed{a=۲} \\ \frac{a}{a+۱}=\frac{۲}{۳} \longrightarrow ۳a=۲a+۲ \end{cases}$$

$y=\frac{۲x+۳}{۳x+۱}=۰ \longrightarrow x=\frac{-۳}{۲}$ جواب

۸ـ $y=\frac{bx^{۲}+۷}{۴x^{۲}+ax+۱} \quad \Big| \; \frac{-۱}{۲} \quad ۳$

مجانب افقی $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{b}{۴}=۳ \longrightarrow \boxed{b=۱۲}$

مجانب قائم $\longrightarrow$ ریشهٔ مخرج $\; ۴\left(\frac{-۱}{۲}\right)^{۲}+a\left(\frac{-۱}{۲}\right)+۱=۰$

$۱+۱-\frac{a}{۲}=۰ \longrightarrow \boxed{a=۴}$

$\frac{b}{a}=۳$

جواب

نکات مهم

۹-

$$y=\frac{x^4}{x^3-8} \longrightarrow y'=\frac{4x^3(x^3-8)-(3x^2)(x^4)}{(x^3-8)^2}$$

$$y'=\frac{4x^6-32x^3-3x^6}{(x^3-8)^2} \longrightarrow y'=\frac{x^6-32x^3}{(x^3-8)^2}$$

$$y'=\frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2}$$

		0		2^*		$\sqrt[3]{32}$	
y'	$+$		$-$		$-$		$+$
y	↗		↘		↘		↗

بازه هایی که تابع در آن نزولی است $\longrightarrow (0,2)\ ,\ (2,\sqrt[3]{32})$

Min طول این بازه ها $\longrightarrow \boxed{\sqrt[3]{32}-2}$ جواب

۱۰-

$$f(x)=\frac{x^4-3}{x^2-3} \qquad x\in(-2,2)$$

$$f'(x)=\frac{4x^3(x^2-3)-(2x)(x^4-3)}{(x^2-3)^2}$$

ریشه‌ها: $3\pm\sqrt{6}$

$$f'(x)=\frac{2x^5-12x^3+6x}{(x^2-3)^2} \longrightarrow \frac{2x(x^4-6x^2+3)}{(x^2-3)^2}$$

	-2		$-\sqrt{3}$		0		$3-\sqrt{6}$		$\sqrt{3}$		2^*		$\sqrt{6}+3$
y'		$-$		$-$		$+$		$-$		$-$			
y		↘		↘		↗		↘		↘			

در ۴ بازه $\longrightarrow$ اکیدا نزولی است.

SCbo