مبینا جعفری پور — تکلیف ۲۲ — دوازدهم دختر B — ۲۰ آفرین

۱

$f(x)=\sqrt{x(1-|x|)}$ $\quad D_f=(-\infty,-1]\cup[0,1]$

x		-1		0		1	
$x(1-\lvert x\rvert)$	$+$		$-$		$+$		$-$

$$f(x)\begin{cases}\sqrt{x(1-x)} & 0\le x\le 1\\ \sqrt{x(1+x)} & x\le -1\end{cases}\qquad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} & 0<x<1\\ \dfrac{1+2x}{2\sqrt{x^2+x}} & x<-1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}x=\frac12 \Rightarrow f\\ x=-\frac12 \text{ خارج از بازه تعریف}\end{cases}$$

x		0		$\frac12$		1
f'		$+$		$-$		

ماکسیمم نسبی

طول نقاط بحرانی: $\{\underbrace{-1,1,0,1}_{\text{دو دو بازه ها}},\frac12\}\Rightarrow k=4\quad m=1\quad n=0\Rightarrow \boxed{k+m+n=5}$ ۲

۲

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-2x}\qquad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{2\sqrt{a-2x}}=0\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{a-2x}}\Rightarrow 2\sqrt{x}=\sqrt{a-2x}\Rightarrow 4x=a-2x\Rightarrow x=\frac{a}{6}$

$D_f=[0,\frac{a}{2}]\Rightarrow f(0)=\sqrt{a}\qquad f(\frac{a}{2})=\underbrace{\sqrt{\frac{a}{2}}}_{y\ min}\qquad f(\frac{a}{6})=\sqrt{\frac{a}{6}}+\sqrt{\frac{4a}{6}}=3\sqrt{\frac{a}{6}}=\sqrt{\frac{3}{2}a}=y\ max$

$\sqrt{\frac{a}{2}}\times\sqrt{\frac{3}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\Rightarrow a=4\Rightarrow\boxed{[a]=4}$ ۲

۳

$f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}|x^2-4|\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2(x^2-4)}{x^2-1}=\dfrac{-x^4+4x^2}{x^2-1} & -2\le x\le 2\\ \dfrac{x^2(x^2-4)}{x^2-1}=\dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1} & x<-2\cup x>2\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2x^5+4x^3-8x}{(x^2-1)^2} & -2<x<2\\ \dfrac{2x^5-4x^3+8x}{(x^2-1)^2} & x<-2\cup x>2\end{cases}$

$f'(x)=0\Rightarrow\dfrac{-2x(x^4-2x^2+4)}{(x^2-1)^2}=0\Rightarrow x=0$

x		-2		-1		0		1		2	
f'	$-$		$+$		$+$		$-$		$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\Rightarrow$ ماکسیمم نسبی ۲

۴

$y=ax^3+bx^2+cx+d\qquad y'=3ax^2+2bx+c\Rightarrow\begin{cases}3a(0)^2+2b(0)+c=0\Rightarrow c=0\\ 3a(1)^2+2b(1)+c=0\Rightarrow 3a+2b=0\end{cases}$

$A: a(0)^3+b(0)^2+c(0)+d=0\Rightarrow d=0$

$B: a(1)^3+b(1)^2+\underbrace{c(1)}_{0}+\underbrace{d}_{0}=1\Rightarrow a+b=1\Rightarrow 2a+2b=2$

$\Rightarrow a=-2,\ b=3\Rightarrow\boxed{ab=-6}$ ۲

۵

$f(x)=\begin{cases}x(3-x^2) & -\sqrt3\le x\le\sqrt3\\ x(x^2-3) & x>\sqrt3\cup x<-\sqrt3\end{cases}\qquad f'(x)=\begin{cases}3-3x^2 & -\sqrt3<x<\sqrt3\\ 3x^2-3 & x>\sqrt3\cup x<-\sqrt3\end{cases}$ ۲ $\qquad f'(x)=0\Rightarrow x=\pm1$

$f(-1,5)=-\frac{3}{2}(3-\frac{9}{4})=-\frac{9}{8}\qquad\boxed{f(-1)=-2}\qquad f(1)=2\qquad f(\sqrt3)=0$

۶

$y=-x^3+3ax^2+b\ :\ x<0\Rightarrow y'=-3x^2+6ax=-3-6a=0\Rightarrow a=-\frac12\qquad y=1-\frac12+b=1\Rightarrow b=\frac32$ ۲ $\qquad\boxed{\frac{b}{a}=-3}$

۷

مجانب ها: $x=\frac{-(a-1)}{a+1}\qquad y=\frac{a}{a+1}\Rightarrow(\frac{1-a}{a+1},\frac{a}{a+1})$

$y=\frac{2x+3}{3x+1}=0\Rightarrow\boxed{x=-\frac32}$ ۲

$y'=3x+1=0\Rightarrow x=-\frac13=\frac{1-a}{a+1}\Rightarrow a=2$

$\frac32(-\frac13)^2+(-\frac13)+\frac{a}{6}=\frac23=\frac{a}{a+1}$

۸

$y=\frac{b}{4}=3\Rightarrow b=12\qquad 4(x+\frac12)^2=4x^2+4x+1\Rightarrow a=4\Rightarrow\boxed{\frac{b}{a}=3}$ ۲

۹

$f(x)=\frac{x^4}{x^3-8}\Rightarrow f'(x)=\frac{4x^3(x^3-8)-3x^2(x^4)}{(x^3-8)^2}=\frac{x^6-32x^3}{(x^3-8)^2}$

$(2,\sqrt[3]{32})\Rightarrow\sqrt[3]{32}-2=\boxed{\sqrt[3]{4}-2}$ ۲

x		0		2		$\sqrt[3]{32}$	
f'	$+$		$-$		$-$		$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

۱۰

$f(x)=\frac{x^4-3}{x^2-3}\Rightarrow f'(x)=\frac{4x^3(x^2-3)-2x(x^4-3)}{(x^2-3)^2}=\frac{2x^5-12x^3+6x}{(x^2-3)^2}=\frac{2x(x^2-(3+\sqrt6))(x^2-(3-\sqrt6))}{(x^2-3)^2}$

x		$-\sqrt{3+\sqrt6}$		$-\sqrt{3-\sqrt6}$		0		$\sqrt{3-\sqrt6}$		$\sqrt{3+\sqrt6}$	
f'		$+$		$+$	$-$		$+$		$-$		$-$
f		$\nearrow$		$\nearrow$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

$\boxed{3\ \text{بازه}}$ ۲