۲۶ مسائل تکلیف

آفرین ۱۹٫۵

به نام خدا

هستی کریمی
دوازدهم ریاضی B

①

$x \geq 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x(1-x)} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} \Rightarrow x=0,\ x=1$ نقاط بحرانی

$D_f: [0,1]$

x		0		$\frac{1}{2}$		1
f'			+	0	−	

$\frac{1}{2}$ نقطه max نسبی | نقاط بحرانی $x=0$, $x=1$

$x \leq 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x(1+x)} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}}$

$D_f: x \geq 0 \vee x \leq -1$

$x=0,\ x=-1$ نقاط بحرانی

$m=1$

$n=0$

$k=3$ (مرز دامنه و مشتق‌ناپذیر و بحرانی)

⟶ ج: ۵ ✓ ۲

②

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{a-2x}$ $\quad D_f: x \geq 0,\ a-2x \geq 0$

$2x \leq a \Rightarrow x \leq \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow D_f: [0, \dfrac{a}{2}]$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{-2}{2\sqrt{a-2x}} \xrightarrow{f'(x)=0} \dfrac{1}{\sqrt{a-2x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 4x = a-2x \Rightarrow$

$6x = a \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{a}{6}}$

$x=0 \longrightarrow f(x) = \sqrt{a}$

$x = \dfrac{a}{2} \longrightarrow f(x) = \sqrt{\dfrac{a}{2}}$

$x = \dfrac{a}{6} \longrightarrow f(x) = \sqrt{\dfrac{a}{6}} + \sqrt{\dfrac{4a}{6}} = \dfrac{\sqrt{a}+2\sqrt{a}}{\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{a}}{\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{6}\sqrt{a}}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{a}$

$\dfrac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{a} \times \sqrt{\dfrac{a}{2}} = \sqrt{12} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{6}{4} \times \dfrac{a^2}{2}} = \sqrt{12} \Rightarrow \dfrac{3a^2}{4} = 12 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow \boxed{a=4}$

۲ ✓ $[a] = 4$

③

$x \geq 2$ یا $x \leq -2$

if $x^2 \geq 4 \longrightarrow f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}(x^2-4) = \dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(4x^3-8x)(x^2-1)-(2x)(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow (4x^3-8x)(x^2-1) = 2x(x^4-4x^2)$

$4x^5 - 4x^3 - 8x^3 + 8x = 2x^5 - 8x^3$

$2x^5 - 4x^3 + 8x = 0 \longrightarrow x=0$

x		0	1
$f'(x)$		○	

جزو دامنه نیست

$x(2x^4 - 4x^2 + 8) = 0$

if $x^2 \le 4$, $-2 \le x \le 2$ $\quad f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}(-x^2+4) = \frac{-x^4+4x^2}{x^2-1}$ ۱٫۷۵

$f'(x) = \frac{(-4x^3+8x)(x^2-1) - (2x)(-x^4+4x^2)}{(x^2-1)^2}$ $\Rightarrow f'(x)=0$

$-4x^5+4x^3+8x^3-8x = -2x^5+8x^3$

$2x^5-4x^3+8x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

$x(2x^4-4x^2+8)$

$2x(x^4-2x^2+4)$

x	-2		0		1		2
$f'(x)$		$-$		$+$	$-\infty$	$+$	

ext $(0,0)$ نقطه مینیمم نسبی

۴

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d = f(x) \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f'(0)=0 \Rightarrow \boxed{c=0}$

ext نسبی $A:(0,0)$, $B:(1,1)$

نقاط روی منحنی هستند در معادله تابع صدق می‌کنند: $f(0)=0 \Rightarrow \boxed{d=0}$ $\qquad f'(1)=0 \Rightarrow \boxed{3a+2b=0}$ I

$f(1)=1 \Rightarrow \boxed{a+b=1}$ II $\qquad$ I, II: $\begin{cases} 3a+2b=0 \\ 2a+2b=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=-2,\ b=3}$

$ab=-6$ ۲

۵

$f(x) = x|3-x^2|$ $\quad [-1.5, \sqrt{3}]$

if $x > \sqrt{3}$: $x < -\sqrt{3} \to f(x) = x^3-3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2-3$

if $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3} \Rightarrow f(x) = 3x - x^3 \Rightarrow f'(x) = 3-3x^2$

نقاط بحرانی

$x=1 \longrightarrow f(x)=2$

$x=-1 \longrightarrow f(x)=-2$

$x=\sqrt{3} \longrightarrow f(x)=0$

$x=-1.5 \longrightarrow f(x)=\frac{-9}{8}$

$\Rightarrow$ مقدار min مطلق : $f(x)=-2$ ۲

۶

$y = x^2|x| + 3ax^2 + b \xrightarrow{A(-1,1)} y = -x^3 + 3ax^2 + b \Rightarrow y' = -3x^2 + 6ax$

$y'(-1)=0 \Rightarrow y' = -3-6a=0 \Rightarrow 6a=-3 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-1}{2}}$

$A(-1,1) \Rightarrow y=1=1+3a+b \Rightarrow \boxed{b=\frac{3}{2}}$ $\Big\} \Rightarrow \frac{b}{a} = -3$ ۲

(۷)

$$y=\frac{4x+3}{(a+1)x+(a-1)}$$

$$y=\frac{3}{2}x^2+x+\frac{5}{9}\Rightarrow y'=3x+1\xrightarrow{y'=0}x=\frac{-1}{3}\Rightarrow y=\frac{2}{3}\Rightarrow$$

x		$\frac{-1}{3}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$

min نقطه : $A(\frac{-1}{3},\frac{2}{3})$

مجانب قائم : $(a+1)x=1-a\Rightarrow x=\frac{1-a}{1+a}$

مجانب افقی : $y=\frac{a}{a+1}$

$\Rightarrow \boxed{a=2}$

$$y=\frac{2x+3}{3x+1}=0\Rightarrow \boxed{x=\frac{-3}{2}}$$

۲

(۸)

$$y=\frac{bx^2+7}{4x^2+ax+1}$$

مجانب افقی : $y=\frac{b}{4}=3\Rightarrow b=12$

مجانب قائم : $4x^2+ax+1=0$

$$4x^2+ax+1=(2x+1)^2$$

$$a=4$$

$$\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{12}{4}=3$$

۲

(۹)

$$f(x)=\frac{x^4}{x^3-8}$$

اکیداً نزولی $\to f'(x)<0$

$$f'(x)=\frac{4x^3(x^3-8)-(3x^2)(x^4)}{(x^3-8)^2}<0\Rightarrow 4x^6-32x^3<3x^6$$

$$x^6<32x^3\Rightarrow$$

$$x^6-32x^3<0$$

$$x^3(x^3-32)<0$$

	0		2		$\sqrt[3]{32}$	
$+$		$-$		$-$		$+$

$x\in(0,2)$

$x\in(2,\sqrt[3]{32})$

ماکزیمم طول بازه : $\sqrt[3]{32}-2$

۲

(۱۰)

۱٫۵

$$f(x) = \frac{x^4 - 3}{x^2 - 3}$$

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2-3) - (2x)(x^4-3)}{(x^2-3)^2} = 0 \Rightarrow 4x^5 - 12x^3 = 2x^5 - 6x$$

$$2x^5 - 12x^3 + 6x = 0$$

$$x(2x^4 - 12x^2 + 6) = 0$$

$$2x(x^4 - 6x^2 + 3) = 0$$ معادله سخت ☹ کنکور ☺

اگر مخرج $x^2 - 2$ باشد:

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2-2) - (2x)(x^4-3)}{(x^2-2)^2} = 0$$

$$4x^5 - 8x^3 = 2x^5 - 6x$$

$$2x^5 - 8x^3 + 6x = 0$$

$$2x(x^4 - 4x^2 + 3) = 0$$

$$2x(x^2-1)(x^2-3) = 0$$

x	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-1	0	$+1$	$\sqrt{2}$	$+\sqrt{3}$
f'	$-\ 0\ +$	$+$	$+\ 0$	$-\ 0\ +$	$0\ -$	$-$	$-\ 0\ +$

۴ بازه

۳ـ

$$f(x) = \pm \frac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} \longrightarrow f'(x) = \pm \frac{(4x^3-8x)(x^2-1) - (x^4-4x^2)2x}{(x^2-1)^2} = 0$$

$$\pm(2x^5 - 4x^3 + 8x) = 0 \quad \to x = 0$$

$$\hookrightarrow x^4 - 2x^2 + 4 = 0 \quad (\text{ریشه ندارد})$$

تعداد ۲, ۲- ریشه‌های قدرمطلق و نقطه‌ی صفر ریشه‌ی مشتق است پس 3 نقطه‌ی بحرانی دارد!

۱۰

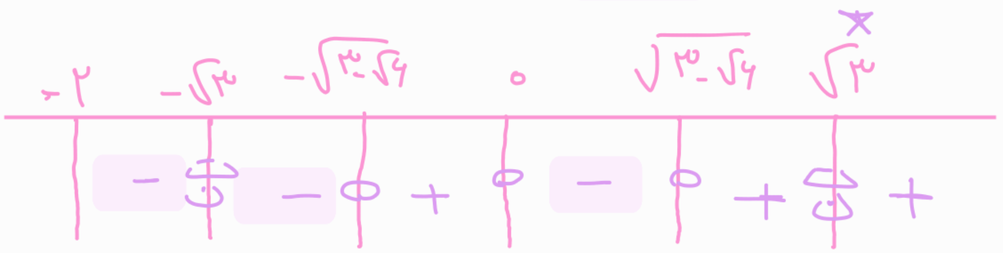
$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2-3) - 2x(x^4-3)}{(x^2-3)^2} = \frac{2x[(2x^4-6x^2) - (x^4-3)]}{(x^2-3)^2}$$

$$2x^5 - 12x^3 + 6x = 0 \longrightarrow 2x(x^4 - 6x^2 + 3) = 0 \quad \to x = 0$$

$$\hookrightarrow x^2 = t$$

$$t^2 - 6t + 3 = 0 \to t = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{2} \longrightarrow x = \pm\sqrt{3-\sqrt{6}}$$

$-2 < x < 2$



در ۳ بازه اکیداً نزولی است!