به نام خدا

هستی کیان
دانشجوی ریاضی B

$x \geq 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x(1-x)} \longrightarrow f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} \Rightarrow$ ① $x=0$ نقاط بحرانی $x=1$

$D_F : [0,1]$

$x \leq 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x(1+x)} \longrightarrow f'(x) = \frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}}$

$D_f : x \geq 0 \vee x \leq -1$

$x=0$ نقاط بحرانی | $x=1$ نقاط بحرانی

$x=0, x=-1$ نقاط بحرانی

$\frac{1}{2}$ نقطه ماکسیمم نسبی

$m=1$
$n=0$
$k=2$ (مجانب مایل و مشترک در دو سمت)

گزینه ③

② $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{a-2x}$

$D_F : x \geq 0, a-2x \geq 0$

$2x \leq a \Rightarrow x \leq \frac{a}{2}$

$\Rightarrow D_f : [0, \frac{a}{2}]$

$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-2}{2\sqrt{a-2x}} \xrightarrow[f'(x)=0]{} \frac{1}{\sqrt{a-2x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 4x = a-2x \Rightarrow$

$6x = a \Rightarrow \boxed{x = \frac{a}{6}}$

$x=0 \longrightarrow f(x) = \sqrt{a}$

$x=\frac{a}{2} \longrightarrow f(x) = \sqrt{\frac{a}{2}}$

$x=\frac{a}{6} \longrightarrow f(x) = \sqrt{\frac{a}{6}} + \sqrt{\frac{2a}{3}} = \frac{\sqrt{a}+2\sqrt{a}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}\sqrt{a}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{a}$

$\frac{\sqrt{6}\sqrt{a}}{2} \times \sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{12} \Rightarrow \sqrt{\frac{6}{4} \times \frac{a^2}{2}} = \sqrt{12} \Rightarrow \frac{3a^2}{4} = 12 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow \boxed{a=4}$

$[a] = 4$

③ $-2 < x \leq 2$

if $x \neq 2 \longrightarrow f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}(3-x^2) \Rightarrow f(x) = \frac{3x^2 - x^4}{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(1-x^2)(6x-4x^3) - (-2x)(3x^2-x^4)}{(1-x^2)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow (1-x^2)(6x-4x^3) = 2x(3x^2-x^4)$

$6x - 4x^3 - 6x^3 + 4x^5 = 6x^3 - 2x^5$

$6x^5 - 16x^3 + 6x = 0 \longrightarrow \boxed{x=0}$

$6(x^4 - 4x^2 + 1) = 0$

x	-2		0		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

جدول تابع

if $x^2 \le 4$, $-2 \le x \le 2$ $\quad f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}(-x^2+4) = \frac{-x^4+4x^2}{x^2-1}$

$$f'(x) = \frac{(-4x^3+8x)(x^2-1) - (2x)(-x^4+4x^2)}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$

$$-4x^5+4x^3+8x^3-8x = -2x^5+8x^3$$

$$2x^5-4x^3+8x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

$2x(x^4-2x^2+4)$

x	-2		0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	

$-\infty$ $-\infty$

نمودار f در $(0,0)$ اکسترمم نسبی

---

(۴)

$y = ax^3+bx^2+cx+d = f(x) \Rightarrow f'(x) = 3ax^2+2bx+c \Rightarrow F'(0)=0 \Rightarrow$

$\boxed{c=0}$

$A:(0,0), B:(1,1)$ گذرد

نقاط بحرانی در صفحات $f(0)=0 \Rightarrow \boxed{d=0}$

$F'(1)=0 \Rightarrow \boxed{3a+2b=0}$ I

$F(1)=1 \Rightarrow \boxed{a+b=1}$ II

I, II $\Rightarrow \begin{cases} 3a+2b=0 \\ 2a+2b=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a=-2 \\ b=3 \end{matrix}}$

$ab=-6$

---

(۵)

$f(x) = x|3-x^2|$ $\quad [-1.5, \sqrt{3}]$

if $x > \sqrt{3}$ یا $x < -\sqrt{3} \Rightarrow f(x) = x^3-3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2-3$

if $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3} \Rightarrow f(x) = 3x-x^3 \Rightarrow f'(x) = 3-3x^2$

نقاط بحرانی

$x=1 \longrightarrow f(x)=2$

$x=-1 \longrightarrow f(x)=-2$

$x=\sqrt{3} \longrightarrow f(x)=0$

$x=-1.5 \longrightarrow f(x)=\frac{-9}{8}$

$\Rightarrow$ مقدار مطلق min : $f(x)=-2$

---

(۶)

$y = x^2|x| + 3ax^2+b$ $\xrightarrow{A(-1,1)}$ $y = -x^3+3ax^2+b \Rightarrow y' = -3x^2+6ax$

$y'(-1)=0 \Rightarrow y' = -3-6a=0 \Rightarrow 6a=-3 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-1}{2}}$

$A(1,1) \Rightarrow y=1 = 1+3a+b \Rightarrow \boxed{b=\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow \frac{b}{a} = -3$

(۷)

$$y=\frac{f(x+۳)}{(a+۱)x+(a-۱)}$$

$$y=\frac{۳}{۲}x^{۲}+x+\frac{a}{۹} \Rightarrow y'=۳x+۱ \xrightarrow{y=۰} x=\frac{-۱}{۳} \Rightarrow y=\frac{۲}{۳}$$

x	$\frac{-۱}{۳}$
$f'(x)$	$-$ ۰ $+$

min نقطه : $A\left(\frac{-۱}{۳},\frac{۲}{۳}\right)$

مجانب قائم : $(a+۱)x=۱-a \Rightarrow x=\frac{۱-a}{۱+a}$

مجانب افقی : $y=\frac{a}{a+۱}$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{a=۲}$

$$y=\frac{۲x+۳}{۳x+۱}=۰ \Rightarrow \boxed{x=\frac{-۳}{۲}}$$

(۸)

$$y=\frac{bx^{۲}+۷}{۴x^{۲}+ax+۱}$$

مجانب افقی : $y=\frac{b}{۴}=۳ \Rightarrow b=۱۲$

مجانب قائم : $۴x^{۲}+ax+۱=۰$

$$۴x^{۲}+ax+۱=(۲x+۱)^{۲}$$

$$a=۴$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{۱۲}{۴}=۳$$

(۹)

$$f(x)=\frac{x^{۴}}{x^{۳}-۸}$$

اکیدا نزولی $\longrightarrow f'(x)<۰$

$$F'(x)=\frac{۴x^{۳}(x^{۳}-۸)-(۳x^{۲})(x^{۴})}{(x^{۳}-۸)^{۲}}<۰ \Rightarrow ۴x^{۶}-۳۲x^{۳}<۳x^{۶}$$

$$x^{۶}<۳۲x^{۳} \Rightarrow x^{۶}-۳۲x^{۳}<۰$$

$$x^{۳}(x^{۳}-۳۲)<۰$$

x	۰		۲		$\sqrt[۳]{۳۲}$
	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$

$$x\in(۰,۲) \quad x\in(۲,\sqrt[۳]{۳۲})$$

منتسم طول بازه : $\sqrt[۳]{۳۲}-۲$

(١٠)

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-1}$$

$$f'(x)=\frac{4x^3(x^2-1)-(2x)(x^2-4)}{(x^2-1)^2}=0 \Rightarrow 4x^4-4x^2=2x^3-8x$$

$$2x^4-4x^3-4x^2+8x=0$$

$$2x(x^3-2x^2-2x+4)=0$$

$$2x(x^2(x-2)-2(x-2))=0$$

$$2x(x-2)(x^2-2)=0$$

$$f'(x)=\frac{4x^3(x^2-1)-(2x)(x^2-4)}{(x^2-1)^2}=0$$

$$4x^4-4x^2=2x^3-8x$$

$$4x^4-2x^3-4x^2+8x=0$$

$$2x(2x^3-x^2-2x+4)=0$$

$$2x(x^2(2x-1)-2(2x-1))=0$$

$$2x(2x-1)(x^2-2)=0$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	0	$+1$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↓	min	↑	max	↓	min	↑

$\frac{1}{2}$ 0 $\frac{1}{2}$