

(سوال ۱)

$$y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1} \Rightarrow yx - y = x^2 + x + 2 \Rightarrow x^2 + (1 - y)x + 2 + y = 0 \Rightarrow x = \frac{(y - 1) \pm \sqrt{y^2 - 4y - 7}}{2} \Rightarrow \Delta \geq 0$$

$$y^2 - 4y - 7 \geq 0 \Rightarrow (y - 5)(y + 1) \geq 0 \Rightarrow \frac{-1}{+1} \frac{5}{-1} \Rightarrow R_f = (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$$

(سوال ۲)

الف) $y = 2x^2 - 5x + 1$ $\min \left| \begin{array}{c} \frac{5}{4} \\ -\frac{17}{8} \end{array} \right|$ $y = 2\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{4}\right) + 1 = \frac{25}{8} - \frac{25}{4} + 1 = -\frac{17}{8}$ $R_y = \left[-\frac{17}{8}, +\infty\right)$

ب) $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 5}$ $\max \left| \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \right|$ $y = -(3)^2 + 4(3) - 5 = -4$ $R_y = \sqrt{[-\infty, 4]} = [0, 2]$

چون بزرگترین توانموزن نزد همت برد برابر می شود با ۱۲ ولی چون رادیکال ادمه روبرش بیان شکل می شه <=

چون بزرگترین توانموزن نزد همت برد برابر می شود با ۱۲

ج) $y = \sqrt{x^2 - 3x^2 + 4x + 1}$ $R_y = \sqrt{12} = [0, +\infty)$

د) $y = \sqrt{x^2 - 4x^2 + 7x + 4}$ $R_y = (-\infty, +\infty)$

(سوال ۳)

الف) $y = \frac{3x + 1}{2x - 4} \Rightarrow \frac{3x + 1}{2x - 4} = y \Rightarrow x = -\frac{-4y - 1}{2y - 3} \Rightarrow x = \frac{y + 1}{2y - 3}$ $2y - 3 \neq 0 \Rightarrow y \neq \frac{3}{2} \Rightarrow R_y = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

ب) $y = \sqrt{\frac{4x + 1}{x - 2}}$ $\Rightarrow R_y = \sqrt{\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}} = [0, +\infty) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

بر توانموزن هموار می شه برابر است با $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ چون رادیکال داریم به شرط لایه روی می شه

چون تابع به نرم $\frac{1}{x}$ است و a همواره مثبت است برد تابع در حالت کلی می شود $(0, +\infty)$ ولی برد وقتی y می شود که a بتواند برابر با یک شود

دلی در اینجا $\sqrt{x^2 + 4}$ هیچگاه برابر با یک نمی شود پس بهترین معادلی که می تواند باشد را بدست می آوریم

ج) $y = \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 3}}$ $= \sqrt{x^2 + 3} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$ $\Rightarrow R_y = \left[\frac{4\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

$x = 0 \Rightarrow \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

چون تابع به نرم $\frac{1}{x}$ است و a همواره مثبت است برد تابع در حالت کلی می شود $(0, +\infty)$ ولی برد وقتی y می شود که a بتواند برابر با یک شود

دلی در اینجا $\sqrt{x^2 + 4}$ هیچگاه برابر با یک نمی شود پس بهترین معادلی که می تواند باشد را بدست می آوریم

د) $y = x^2 + \frac{1}{x^2 + 4}$ $\Rightarrow \boxed{x^2 + 4 + \frac{1}{x^2 + 4}} - 4$ $\Rightarrow R_y = \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$

$x = 0 \Rightarrow 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$ $R_y = \left[\frac{17}{4}, +\infty\right) \xrightarrow{-4} R_y = \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$

(سوال ۴)

$y = \frac{3x^2 + 4}{x^2 - 1} \rightarrow$ روش اصلی: $\frac{3x^2 + 4}{x^2 - 1} = y \Rightarrow x^2 = \frac{-y - 4}{y - 3} \Rightarrow x^2 = \frac{y + 4}{y - 3} \geq 0 \Rightarrow \frac{-4}{+1} \frac{3}{-1} \Rightarrow R_y = (-\infty, -4] \cup (3, +\infty)$

چونخرج ریشه دار در خارج دوعدی می شه و بازه ای می شه که از ۳ به ۴ باز

$x^2 \geq 0 \Rightarrow y = \frac{4}{-1} = -4$, $x^2 = +\infty \Rightarrow \frac{3(+\infty)}{+\infty} = 3 \Rightarrow R_y = (-\infty, -4] \cup (3, +\infty)$

(سوال ۵)

$y = \frac{2 \sin \alpha - 1}{\sin \alpha + 3} \rightarrow$ روش اصلی: $\frac{2 \sin \alpha - 1}{\sin \alpha + 3} = y \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3y + 1}{y - 2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3y + 1}{y - 2} \rightarrow -1 \leq \frac{3y + 1}{y - 2} \leq 1$

$\frac{3y + 1}{y - 2} + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{4y + 3}{y - 2} \geq 0 \Rightarrow \frac{-\frac{3}{4}}{-1 + \frac{2}{3}} \text{ ① } , \frac{3y + 1}{y - 2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{4y - 1}{y - 2} \leq 0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{4}}{-1 + \frac{2}{3}} \text{ ② } \Rightarrow \text{①} \cap \text{②} \Rightarrow R_y = \left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right]$

چون خرج ریشه دار در بدین ۲ عدد بدست آمده است

$\sin \alpha = -1 \Rightarrow y = \frac{-3}{4}$, $\sin \alpha = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{4} \rightarrow R_y = \left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right]$

سوال ۶)

$$f(x) = \frac{x^2 - x + \frac{1}{x}}{x^2 - x + 1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

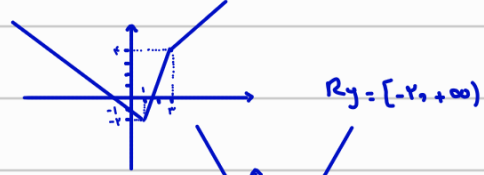
$$x^2 - x + y = \frac{x^2 - x + \frac{1}{x}}{x^2 - x + 1} \Rightarrow (y-1)x^2 - (y-1)x + y - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = \frac{(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - 4(y-\frac{1}{x})(y-1)}}{2(y-1)} \Rightarrow (y-1)^2 - 4(y-\frac{1}{x})(y-1) \geq 0$$

نشان داده از روش دلتا خلاف منتهی شدن است. اما تابع به ازای هیچ مقداری برابر ۱ نمی شود. پس

$$y=1 \text{ در بردار تابع وجود ندارد. بنابراین بردار تابع برابر می شود با: } R_f = [0, 1)$$

الف) $y = |2x-2| - |x-3|$

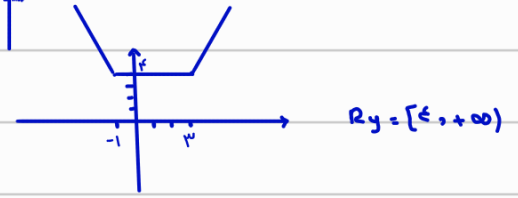
	1	3
$-2x+2+x-3$	$2x-2+x-3$	$2x-2-x+3$
$= -x-1$	$= 3x-5$	$= x+1$



سوال ۷)

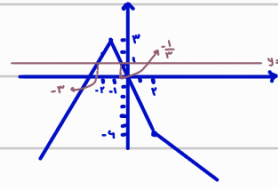
ب) $y = |x-3| + |x+1|$

	-1	3
$-x+3-x-1$	$x-3+x+1$	$x-3+x+1$
$= -2x+2$	$= 4$	$= 2x-2$



الف) $y = |x-2| - |2x+2|$

	-1	2
$-x+2+2x+2$	$x-2-2x-2$	$x-2-2x-2$
$= x+4$	$= -x-4$	$= -x-4$



سوال ۸)

الف) $y = [x] + [3-x] \rightarrow y = [x] + [-x] + 3 \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \rightarrow y = 3, x \notin \mathbb{Z} \rightarrow y = 2$

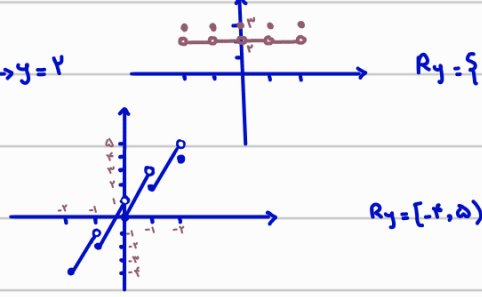


سوال ۹)

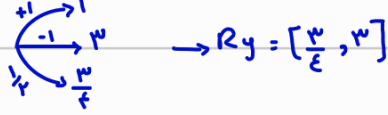
ب) $y = 3x - [x]$

$-1 < x < 1 \xrightarrow{[x]=-1} 3x+2, -1 < x < 0 \xrightarrow{[x]=-1} 3x+1$

$0 < x < 1 \xrightarrow{[x]=0} 3x, 1 < x < 2 \xrightarrow{[x]=1} 3x-1, x=2 \rightarrow y=4$



الف) $y = \sin^2 x - \sin x + 1$



سوال ۱۰)

ب) $y = \sin^2 x + \sin x + 1$

