

$$y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1} \xrightarrow{\text{نسبت کردن طرفین به هم}} yx - y = x^2 + x + 2 \rightarrow x^2 + (1 - y)x + 2 + y = 0$$

$$x = \frac{(y-1) \pm \sqrt{(1-y)^2 - 4(1)(2+y)}}{2}$$

$$(1-y)^2 - 4(2+y) = 1 + y^2 - 4y - 8 - 4y \geq 0 \rightarrow y^2 - 8y - 7 \geq 0 \rightarrow y \leq -1 \text{ یا } y \geq 7$$

Min دار $y = 2x^2 - 5x + 1$ ضریب x^2 مثبت

ج) $y = \sqrt{x^2 - 3x^2 + 2x + 1}$
 عبارت مرتبه دوم است پس دامنه $[0, +\infty) = R_y$
 عبارت زیر رادیکال $R = [0, 2]$
 $R_y = [-\frac{17}{8}, +\infty)$

ب) $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 5}$
 $-x^2 + 4x - 5 \leq 0 \rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq 5$

ج) $\log(x^3 - 4x^2 + 7x + 2)$
 بردار x در $\mathbb{R} \rightarrow R_y = \mathbb{R}$

الف) $y = \frac{3x+1}{2x-4}$
 بر $R = \mathbb{R} - \{2\}$
 $R_y = \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$

ب) $y = \sqrt{\frac{2x+1}{x-2}}$
 عبارت مرتبه اول است پس دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$
 عبارت زیر رادیکال $R = [0, +\infty) - \{2\}$

ج) $y = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 3}}$
 $\frac{x^2 + 3 + 1}{\sqrt{x^2 + 3}} \rightarrow \sqrt{x^2 + 3} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}$
 $y = x^2 + \frac{1}{x^2 + 2} + 4 - 4$
 $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2 + 2} \geq \frac{17}{2} \rightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2 + 2} - 4 \geq \frac{17}{2} - 4$
 $R = [\frac{1}{2}, +\infty)$

الف) $y = \frac{3x^2 + 2}{x^2 - 1} \rightarrow yx^2 - y = 3x^2 + 2$

$(y-3)x^2 = 2+y$

$x^2 = \frac{2+y}{y-3} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2+y}{y-3}}$

$\frac{2+y}{y-3} \geq 0 \rightarrow y \leq -2 \text{ یا } y \geq 3$
 $x \in (-\infty, -2] \cup (3, +\infty)$

راه دیگر: $x^2 \rightarrow 0 \rightarrow -2$
 $x^2 \rightarrow +\infty \rightarrow 3$
 مجزای توانده منفرجه
 $x \in (-\infty, -2] \cup (3, +\infty)$
 صده است پس باز است

الف) $F(x) = \frac{2 \sin x - 1}{\sin x + 3}$ $\textcircled{1} \textcircled{2}, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$y \sin x + 3y = 2 \sin x - 1$
 $(y-2) \sin x = -1 - 3y$
 $\sin x = \frac{-1-3y}{y-2}$
 $-1 \leq \frac{-1-3y}{y-2} \leq 1$

راه دیگر: $\sin x \rightarrow 1 \rightarrow \frac{1}{4}$
 $\sin x \rightarrow -1 \rightarrow -\frac{3}{4}$
 مجزای توانده منفرجه
 $[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}]$

$$y = \frac{x^2 - x + \frac{1}{2}}{x^2 - x + 1}$$

تساوی $y = \frac{x^2 - x + \frac{1}{2}}{x^2 - x + 1}$ را به صورت $(y-1)x^2 - (y-1)x + y - \frac{1}{2} = 0$ درآوریم.

$$x = \frac{(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - 2(y-\frac{1}{2})(y-1)}}{2(y-1)}$$

$$(y-1)^2 - 2(y-\frac{1}{2})(y-1) \geq 0$$

$$(y-1)(-2y) \geq 0 \rightarrow 0 \leq y \leq 1$$

پس: $x^2 - x + 1 \neq 0$

$$\Delta < 0 \rightarrow D_y = \mathbb{R}$$

$$R_y = [0, 1]$$

بردار

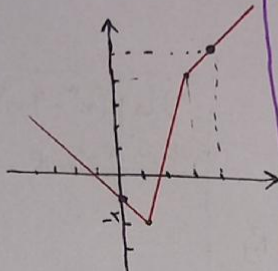
به ازای هر y در $[0, 1]$ معادله $(y-1)x^2 - (y-1)x + y - \frac{1}{2} = 0$ را حل می‌کنیم.

۶

الف) $y = |2x-2| - |x-3|$

$$\begin{cases} 2x-2 & x > 3 \\ 2x-2 & 1 \leq x \leq 3 \\ -x-1 & x < 1 \end{cases}$$

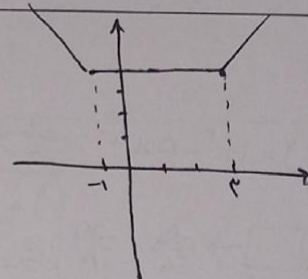
$$R_y = [2, +\infty)$$



ب) $y = |x-2| + |x+1|$

$$\begin{cases} x+2 & x > 2 \\ x & -1 \leq x \leq 2 \\ -x+2 & x < -1 \end{cases}$$

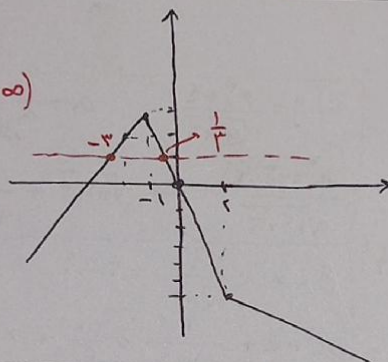
$$R_y = [2, +\infty)$$



۷

$$|x-2| - |2x+2| \leq 1$$

$$x \in (-\infty, -3] \cup [\frac{1}{3}, +\infty)$$



$$\begin{cases} -x & x > 2 \\ -2x & -1 \leq x \leq 2 \\ x+2 & x < -1 \end{cases}$$

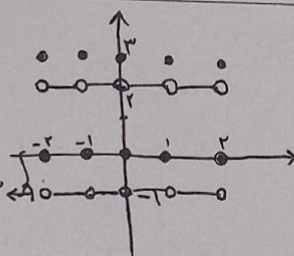
۸

الف) $y = [x] + [3-x]$

برای $x \in [n, n+1)$ داریم $[x] = n$ و $[3-x] = 3-n-1 = 2-n$ پس $y = n + 2 - n = 2$.

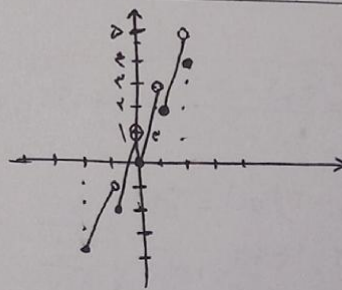
$$y = [x] + [3-x] = 2$$

پس $y = 2$ برای تمام x در $\mathbb{R}$.



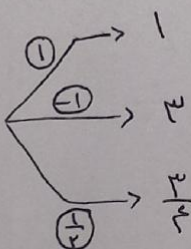
ب) $y = [x] - [x]$

$$\begin{aligned} -2 \leq x < -1 &\rightarrow 3x+2 \\ -1 \leq x < 0 &\rightarrow 2x+1 \\ 0 \leq x < 1 &\rightarrow 3x \\ 1 \leq x < 2 &\rightarrow 3x-1 \\ x=2 &\rightarrow 2 \end{aligned}$$



۹

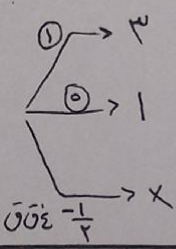
الف) $y = \sin^2 x - \sin x + 1$



$$R_y = [\frac{3}{4}, 2]$$

ب) $y = \sin^2 x + \sin^2 x + 1$

$$\sin^2 x = t \rightarrow y = t^2 + t + 1$$



$$R_y = [1, 2]$$

۱۰