۱- فسیلوینی ۱۲ ام سرستشبد

۱۴٫۵ آفرین!

۲

$yx - y = x^2+x+2 \to x^2 + x(1-y) + 2+y = 0 \to$

$y\neq 1 \to x = \frac{-1+y \pm \sqrt{(1-y)^2-4(1)(2+y)}}{2} \xrightarrow{\Delta\geq 0} y^2-2y+1-8-4y\geq 0$

$y^2-6y-7\geq 0 \to (y-7)(y+1)\geq 0$

$y=1 \to x^2=-3$ ق ن

$+ \quad -1 \quad - \quad 7 \quad +$ $\quad y\geq 7$ یا $y\leq -1$

۲- ۲

الف) $y=2x^2-5x+1 \to a>0 \to x_{min} = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{4} \to y_{min} = 2\left(\frac{25}{16}\right)-\frac{25}{4}+1 = -\frac{17}{8}$

برد $\to \left[-\frac{17}{8}, +\infty\right)$

ب) $y=\sqrt{-x^2+6x-5}$ $\quad x_{max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-2} = 3 \to y_{max} = -9+18-5 = 4$

$a<0$

برد $= \sqrt{[-\infty, 4]} = [0, 2]$

ج)

می دانیم برد عبارت چندجمله ای با بزرگترین توان فرد برابر R است

$\sqrt{R} = [0, +\infty)$

د) $\log(R)$ $\quad R_f = (-\infty, +\infty)$ " "

۳- ۲

الف) $2yx-6y = 3x+1 \to 3x-2yx = -6y-1 \to x(3-2y) = -6y-1$

$\to x = \frac{6y+1}{2y-3} \quad R_f = R-\left\{\frac{3}{2}\right\}$

ب) ① $y\geq 0$

② $y^2 = \frac{4x+1}{x-2} \to 4x+1 = y^2x-2y^2 \to x(4-y^2) = -2y^2-1$

$x = \frac{2y^2+1}{y^2-4} \quad y^2-4\neq 0 \to y\neq \pm 2$

$\to [0,+\infty)-\{-2\}$ ۲

دقت کن!

پ) $\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{x^2+3+1}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}} = \sqrt{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$

می دانیم اگر $a\geq 0 \leftarrow a+\frac{1}{a}\geq 2$

$\sqrt{x^2+3} \xrightarrow[\text{به ازای } x=0]{min} \sqrt{0+3} = \sqrt{3} \to \sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$R_f = \left[\frac{4\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

د) $x^2+4+\frac{1}{x^2+4}-4 \to \underbrace{x^2+4}_{a\geq 4}+\frac{1}{x^2+4} \to a+\frac{1}{a} \to \min$ به ازای $x=0 \to 4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$

$\to \frac{17}{4}-4=\frac{1}{4}$

$R_f=[\frac{1}{4},+\infty)$

۴- ۲

$yx^2-y=3x^2+4 \to yx^2-3x^2=y+4 \to x^2(y-3)=y+4$

$\to x^2=\frac{y+4}{y-3}$

$\to \frac{y+4}{y-3}\geq 0$ $\quad$ $+\ \ -4\ \ -\ \ 3\ \ +$

$\boxed{y>3 \cup y\leq -4}$

$y=\frac{3x^2+4}{x^2-1}$ $\quad \square \to x^2 \to x^2\geq 0 \to x^2=0 \to y=\frac{4}{-1}=-4$

$x^2=\infty \to y=\frac{3\infty+4}{\infty-1}=\frac{3\infty}{\infty}=3$

$x^2-1=0 \to x^2=1 \to$ مخرج نمی‌تواند صفر شود $\to R_f=(-\infty,-4]\cup(3,+\infty)$

۵- ۲

$y=\frac{2\sin x-1}{\sin x+3} \to y\sin x+3y=2\sin x-1 \to \sin x(2-y)=1+3y$

$\to \sin x=\frac{1+3y}{2-y} \to -1\leq \frac{1+3y}{2-y}\leq 1 \to \frac{1+3y}{2-y}\geq -1$

$\to \frac{1+3y}{2-y}+1\geq 0 \to \frac{1+3y+2-y}{2-y}=\frac{2y+3}{2-y}\geq 0 \to$ $\quad -\ \ -\frac{3}{2}\ \ +\ \ 2\ \ -$

$\frac{1+3y}{2-y}-1\leq 0 \to \frac{1+3y-2+y}{2-y}=\frac{4y-1}{2-y}\leq 0$ $\quad$ ① $\boxed{-\frac{3}{2}\leq y<2}$

$-\ \ \frac{1}{4}\ \ +\ \ 2\ \ -$ $\quad$ ② $y>2$, $y\leq \frac{1}{4}$

$①\cap② = -\frac{3}{2}\leq y\leq \frac{1}{4}$

راه ۲ $\to \square=\sin x$ $\quad -1\leq \sin x\leq 1 \to \sin x=1 \to y=\frac{2-1}{1+3}=\frac{1}{4}$

$\sin x=-1 \to y=\frac{-2-1}{-1+3}=-\frac{3}{2}$

$\sin x+3=0 \to \sin x=-3 \to$ مخرج صفر نفی‌شود $\to -\frac{3}{2}\leq y\leq \frac{1}{4}$

۶- ۱/۵

$f(x)=\frac{x^2-x+\frac{1}{4}}{x^2-x+1}$ $\quad D_f=R-\{$ریشه مخرج$\}$

$x^2-x+1=0 \to \Delta<0 \to D_f=R$

$-x(y+1)$

$yx^2-yx+y=x^2-x+\frac{1}{4} \to x^2(y-1)+x(-y-1)+y-\frac{1}{4}=0$

$x=\frac{1+y\pm\sqrt{(1+y)^2-4(y-1)(y-\frac{1}{4})}}{2(y-1)} \to \Delta\geq 0 \to$ ادامه صفحه بعد

$y\neq 1 \leftarrow$ $\quad \Delta\geq 0 \quad (y-1)^2-4(y-\frac{1}{4})(y-1)\geq 0$

$y^2+2y+1-4(y^2-\frac{5}{4}y+\frac{1}{4})>0 \to y^2+2y+1-4y^2+20y-1>0$

$0\leq y<1$

$-3y^2+22y>0 \to y(-3y+22)>0$

$- \quad 0 \quad + \quad \frac{22}{3} \quad - \quad \to 0<y<\frac{22}{3}$

۷- ۲

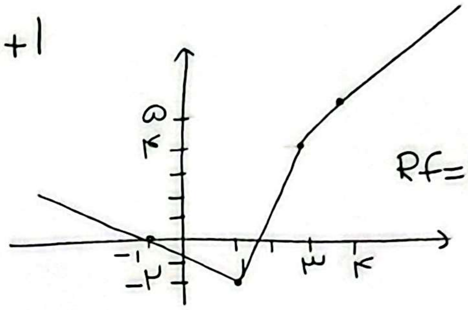
الف)

$1 \quad\quad 3$

$2x-2-x+3=x+1$

$2x-2+x-3=3x-5$

$-2x+2+x-3=-x-1$



$R_f=[-2,+\infty)$

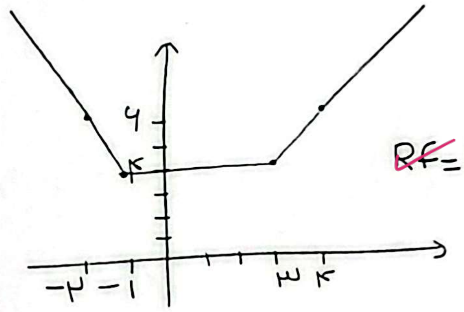
ب)

$-1 \quad\quad 3$

$2x-2$

$-x+3+x+1=4$

$-x+3-x-1=-2x+2$



$R_f=[4,+\infty)$

۸- ۲

$-1 \quad\quad 2$

$x-2-2x-2=-x-4\leq 1$

$-x\leq 5 \quad x\geq -5$ ۳

$-x+2-2x-2=-3x\leq 1 \to x\geq -\frac{1}{3}$

$-x+2+2x+2=x+4\leq 1$

$\boxed{x\leq -3}$ ۱

$\boxed{-\frac{1}{3}\leq x\leq 2}$ ۲

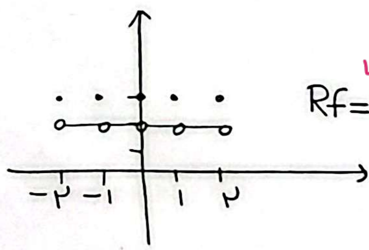
$۱\cup ۲\cup ۳=[-\infty,-3]\cup[-\frac{1}{3},+\infty)$

۹- ۲

الف) $[x]+[3-x]=[x]+[-x]+3 \to$

$x\in Z \to [x]+[-x]=0 \to y=3$

$x\notin Z \to [x]+[-x]=-1 \to y=2$



$R_f=\{2,3\}$

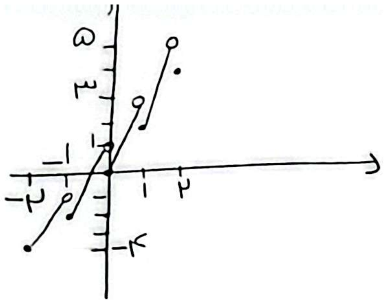
ب) $y=3x-[x] \to -2\leq x<-1 \to [x]=-2 \to y=3x+2$

$-1\leq x<0 \to [x]=-1 \to y=3x+1$

$0\leq x<1 \to [x]=0 \to y=3x$

$1\leq x<2 \to [x]=1 \to y=3x-1$

$x=2 \to [x]=2 \to y=3x-2$



$R_f=[-4,5)$

۱۰- ۲

الف) $y=\sin^2 x-\sin x+1 \to \square=\sin x \to -1\le \sin x\le 1$

$\sin x=-1\to y=1+1+1=3$

$\sin x=1 \to y=1-1+1=1$

$\sin x=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2} \to y=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$

$\to R_f=[\frac{3}{4},3]$

ب) $y=\sin^4 x+\sin^2 x+1 \qquad \square=\sin^2 x \qquad 0\le\sin^2 x\le 1$

$\sin^2 x=0\to y=1$

$\sin^2 x=1\to y=3$

$\sin^2 x=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2}$ غ ق ق

$\to R_f=[1,3]$