سانیا ستاری — تکلیف شماره ۳ — ۱۷/۷۵ دقت کن!

① (۲)

$yx - y = x^2 + x + 2 \Rightarrow x^2 + (1-y)x + 2 + y$

$x = \dfrac{y - 1 \pm \sqrt{1 + y^2 - 2y - 8 - 4y}}{2} \Rightarrow y^2 - 6y - 7 \geq 0 \Rightarrow (y-7)(y+1) \geq 0$

$-1 \quad 7$

$+ \mid - \mid +$

$R_f = (-\infty, -1] \cup [7, +\infty)$

② (۱/۵)

$-\frac{b}{2a} = \frac{5}{4} \rightarrow f(\frac{5}{4}) = -\frac{17}{8} \quad R_f = [-\frac{17}{8}, +\infty)$

الف) $y = 2x^2 - 5x + 1 \Rightarrow R = [\ ,+\infty) \Rightarrow R_f = [-\frac{21}{4}, +\infty)$

عرض راس سهمی

$\sqrt{4} = 2$

ب) $-x^2 + 6x - 5 \rightarrow R = (-\infty, \ ] \Rightarrow R = (-\infty, 2]$ زیر رادیکال $\Rightarrow R_f = [0, 2]$

عرض راس سهمی

ج) برد چندجمله‌ای که توان فرد $= \mathbb{R}$: رادیکال $\Rightarrow R = [0, +\infty)$

د) برد چندجمله‌ای که توان فرد $= \mathbb{R}$

از رادیکال $R_f = \mathbb{R}$

③ (۰/۷۵)

الف) $2yx - 4y = 3x + 1 \rightarrow x = \dfrac{4y - 1}{2 - 2y} \Rightarrow 2y \neq 3 \Rightarrow y \neq \frac{3}{2}$

$R_f = \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$

دقت!

ب) $\dfrac{3x+1}{x-2} \Rightarrow R = \mathbb{R} - \{3\}$: رادیکال $\Rightarrow R = [0, +\infty) - \{3\}$

$\sqrt{4} = 2$

ج) $\sqrt{x^2+3} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ $\rightarrow (a + \frac{1}{a})$, $\sqrt{x^2+3} \geq 0$ $\quad R = [2, +\infty)$

$y_{min} \rightarrow x = 0 \rightarrow \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \rightarrow R_f = [\frac{4}{\sqrt{3}}, +\infty)$

د) $x^2 + 3 + \dfrac{1}{x^2+3} - 3 \longrightarrow R_f = [-1, +\infty)$

$a^2 + 1 \geq 0$

$[2, +\infty)$

$y_{min} \rightarrow x = 0 \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow R_y = [\frac{1}{4}, +\infty)$

در تابع $a + \frac{1}{a}$

وقتی برد از $[2, +\infty)$ تا $(-\infty, -2]$ است که min_a برابر (1) یا (-1) باشد؛ در غیر این صورت باید

کمترین مقدار a را حساب کرد

(۴) ۲

روش اصلی: $yx^2 - y = 3x^2 + 4 \Rightarrow (3-y)x^2 = -y-4 \Rightarrow x^2 = \frac{-y-4}{3-y}$

$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{-y-4}{3-y}} \Rightarrow$ (sign table: -4, 3)

$R = (-\infty, -4] \cup (3, +\infty)$

تذکر ۲: $x^2 \in [0, +\infty)$, $x=0 \rightarrow y=-4$, $x=+\infty \rightarrow y=3$

چون ریشه مخرج داریم پس مرز مخرج این دو است

$R_f = (-\infty, -4] \cup (3, +\infty)$ ✓

---

(۵) ۲

روش اصلی: $y\sin x + 3y = 2\sin x - 1 \Rightarrow (2-y)\sin x = 3y+1$

$\Rightarrow \sin x = \frac{3y+1}{2-y}$

$\Rightarrow -1 \le \frac{3y+1}{2-y} \le 1$

$-1 \le \frac{3y+1}{2-y} \Rightarrow \frac{3y+1+2-y}{2-y} \ge 0 \Rightarrow \frac{2y+3}{2-y} \ge 0$ (sign table: $-\frac{3}{2}$, 2: $- + -$)

$\frac{3y+1}{2-y} \le 1 \Rightarrow \frac{3y+1-2+y}{2-y} \le 0$ ($4y-1$) (sign table: $\frac{1}{4}$, 2: $- + -$)

اشتراک

$R = [-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}]$

$D = \sin x$

تذکر ۲: $-1 \le \sin x \le 1$, $-1 \rightarrow y = -\frac{3}{2}$, $1 \rightarrow y = \frac{1}{4}$

چون $\sin x \ne -3$ $\Rightarrow R = [-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}]$ ✓

---

(۶) راه حل کامل بنویسید!

۱,۲۵

$x^2 - x + 1 \ne 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow x^2 - x + 1$ همواره بزرگتر از صفر

$D_f = R$

$D = x^2 - x$

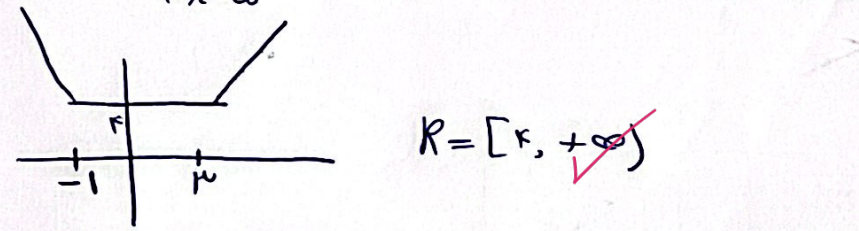
$x^2 - x \rightarrow [-\frac{1}{4}, +\infty)$, $x^2 - x = -\frac{1}{4} \rightarrow y = 0$, $x^2 - x = +\infty \rightarrow y = 1$ $\Rightarrow R_f = [0, 1]$

مخرج صفر نمی‌شود

$y \ne 1 \rightarrow R_f = [0, 1)$

۷

ب)



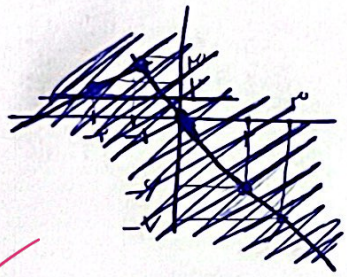
$\leadsto R=[-۳,+\infty)$ ✓

الف)

$R=[۲,+\infty)$ ✓

۱

۲



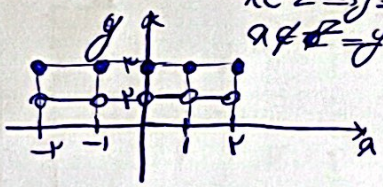
۵

الف) $[x]+[-x]+۲$

$x\in Z \Rightarrow 0$

$x\notin Z \Rightarrow -1$

$\Rightarrow R=\{۱,۲\}$ ✓



ب)

$x=۲ \rightarrow y=۲x-۲$

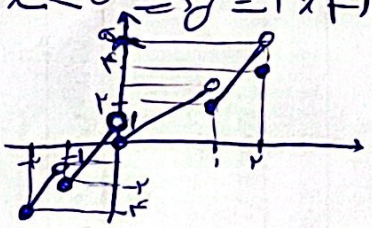
$۱\le x<۲ \Rightarrow y=۲x-۱$

$-۲\le x<-۱ \Rightarrow y=۲x+۲$

$۰\le x<۱ \Rightarrow y=۲x$

$-۱\le x<۰ \Rightarrow y=۲x+۱$

$R_f=[-۲,۳)$



۱۵

۲

الف)

$\sin x=1 \Rightarrow y=1$

$\sin x=-1 \Rightarrow y=۳$

$\sin x=۰ \Rightarrow y=\frac{۳}{۲}$

$R=[\frac{۳}{۲},۳]$ ✓

ب)

$\sin^۲ x=1 \Rightarrow y=۳$

$\sin^۲ x=۰ \Rightarrow y=1$

$\sin^۲ x=-1$

$R=[1,۳]$ ✓