فاطمه رستمی - دوازدهم سه شنبه

سوال ۱

$$y=\frac{x^2+x+2}{x-1}\rightarrow yx-y=x^2+x+2\rightarrow x^2+x(1-y)+2+y=0$$

$$\Delta=b^2-4ac\rightarrow (1-y)^2-4(2+y)=1+y^2-2y-8-4y\rightarrow y^2-6y-7$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\rightarrow x=\frac{y-1\pm\sqrt{y^2-6y-7}}{2}\rightarrow \Delta\geq 0$$

$$y^2-6y-7\geq 0\rightarrow (y-7)(y+1)\geq 0$$

	-1		7	
$+$	0	$-$	0	$+$

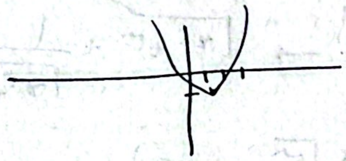
$$\boxed{R_f=(-\infty,-1]\cup[7,+\infty)}$$

سوال ۲

الف) $y=2x^2-5x+1$

$$x_s=-\frac{b}{2a}\rightarrow\frac{5}{4}\rightarrow y_s=(2)\left(\frac{5}{4}\right)^2-5\left(\frac{5}{4}\right)+1\rightarrow 2\times\frac{25}{16}-\frac{25}{4}+1$$

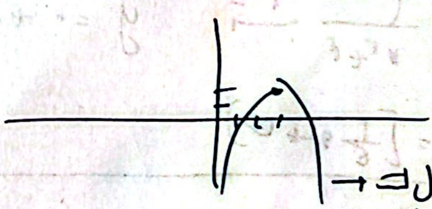
$$\frac{25}{8}-\frac{50}{8}+\frac{8}{8}=\boxed{-\frac{17}{8}}$$



$$R_f=\left[-\frac{17}{8},+\infty\right)$$

ب) $y=\sqrt{-x^2+6x-5}\rightarrow y=-x^2+6x-5\rightarrow x_s=-\frac{b}{2a}=\frac{-6}{-2}=3$

$$y_s=\sqrt{-(9)+18-5}=\sqrt{4}=2$$



max دارد

مقدار زیر رادیکال ←

و عدد منفی در آن قبول نیست ⊗

$$R_f=[0,2]$$

ج) $y=\sqrt{x^3-3x^2+4x+1}\rightarrow$ برد تمام توابع چندجمله‌ای از مرتبه‌ی فرد (که بزرگترین توان آن فرد است) برابر R است. اما این عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی ۰ باشد

$$R_f=[0,+\infty)$$

د) $y=\log(\underbrace{x^3-9x^2+7x+4}_{\text{برد عبارت R است}})$ $\quad R_f=(-\infty,+\infty)$

سوال ۳

الف) $y=\dfrac{3x+1}{2x-6} \to 2xy-6y=3x+1 \to 3x-2xy+6y+1=0$

$x(3-2y)+6y+1=0 \to x=\dfrac{6y+1}{2y-3} \to 2y-3\neq 0 \to 2y\neq 3 \quad \boxed{y\neq \frac{3}{2}}$

$R_f=R-\left\{\frac{3}{2}\right\}$

ب) $y=\sqrt{\dfrac{4x+1}{x-2}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} y^2=\dfrac{4x+1}{x-2} \to y^2x-2y^2=4x+1$

$\to -y^2x+4x=-2y^2-1 \to x(4-y^2)=-2y^2-1$

$x=\dfrac{-2y^2-1}{4-y^2} \to x=\dfrac{2y^2+1}{y^2-4} \to y\geq 0 \to \boxed{y\neq 2}$

چون عبارت زیر رادیکال و همیشه مثبت است

$R_f=[0,+\infty)-\{2\}$

ج) $y=\dfrac{x^2+4}{\sqrt{x^2+3}} \to \dfrac{x^2+3+1}{\sqrt{x^2+3}} \to \underbrace{\sqrt{x^2+3}}_{\min=\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}} \to \sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \qquad R=\left[\dfrac{4\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

د) $x^2+\dfrac{1}{x^2+4} \xrightarrow[x^2=0]{\min \text{ صفر}} y=0+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$

$R_f=\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$

سوال ۴

$y=\dfrac{3x^2+4}{x^2-1} \to yx^2-y=3x^2+4 \to 3x^2-yx^2=-y-4$

$x^2(3-y)=-y-4 \to x^2=\dfrac{y+4}{y-3} \to x=\pm\sqrt{\dfrac{y+4}{y-3}}$

-4		3	
$+$ 0	$-$	$\mid$	$+$

$(-\infty,\underbrace{-4]}_{\text{بسته}}\cup\underbrace{(3}_{\text{باز}},+\infty)$

راه دوم $\to y=\dfrac{3x^2+4}{x^2-1}$: $x^2=0 \to \dfrac{4}{-1}=-4$ ، $x^2\to\infty \to =3$

چون ریشه مخرج را بین ۳ ما خارج از این محدوده است.

$R_f=(-\infty,-1]\cup(3,+\infty)$

سوال ۵

$$y=\frac{2\sin x-1}{\sin x+2}$$

روش اول $\longrightarrow y\sin x+2y=2\sin x-1 \longrightarrow 2\sin x-y\sin x=2y+1$

$$\sin x(2-y)=2y+1 \longrightarrow \sin x=\frac{2y+1}{2-y}$$

$$-1\le \sin x\le 1 \longrightarrow -1\le\frac{2y+1}{2-y}\le 1 \longrightarrow \frac{2y+1}{2-y}\ge -1 \longrightarrow \frac{3y+1}{2-y}+\frac{2-y}{2-y}\ge 0$$

$$\frac{2y+3}{2-y}\ge 0 \qquad \begin{array}{ccccc} & -\frac{3}{2} & & 2 & \\ - & | & + & | & - \end{array} \quad (1)$$

$$\frac{3y+1}{2-y}\le 1 \longrightarrow \frac{2y+1}{2-y}+\frac{y-2}{2-y}\le 0$$

$$\frac{4y-1}{2-y}\le 0 \longrightarrow \begin{array}{ccccc} & \frac{1}{4} & & 2 & \\ - & | & + & | & - \end{array} \quad (2)$$

اشتراک

$-\frac{3}{2}$ $\quad \frac{1}{4}$ $\quad 2$

$$(1)\cap(2) \longrightarrow \left[-\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right]$$

روش دوم $\longrightarrow y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x+2}$

$$\xrightarrow{\sin x=1} \frac{2(1)-1}{1+2}=\frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\sin x=-1} \frac{2(-1)-1}{-1+2}=\frac{-3}{2}$$

$$R_f=\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right]$$

سوال ۶

$$y=\frac{x^2-x+\frac{1}{4}}{x^2-x+1} \longrightarrow yx^2-xy+y=x^2-x+\frac{1}{4}$$

$$yx^2-x^2-xy+x+y-\frac{1}{4}=0 \longrightarrow (y-1)x^2-(y-1)x+y-\frac{1}{4}=0$$

$$x=\frac{(y-1)\pm\sqrt{(y-1)^2-4\left(y-\frac{1}{4}\right)(y-1)}}{2(y-1)}$$

$$(y-1)^2-4\left(y-\frac{1}{4}\right)(y-1)\ge 0 \longrightarrow (y-1)(y-1-4y+1)\ge 0 \longrightarrow (y-1)(-3y)\ge 0$$

$\boxed{0\le y<1}$ $\longrightarrow$ و شرط استفاده از روش Δ مخالف صفر بودن ضریب x^2 است
اما تابع به ازای همه مقادیر بیان شده ... پس $y=1$ بازه

راه دوم $\longrightarrow R-\{\text{ریشه‌های مخرج}\} \longrightarrow x^2-x+1=0 \longrightarrow \Delta=b^2-4ac$

$1-4(1)<0 \longrightarrow -3<0 \longrightarrow \Delta<0$ هرگز ریشه ندارد

$\boxed{D=R}$

سوال ۷

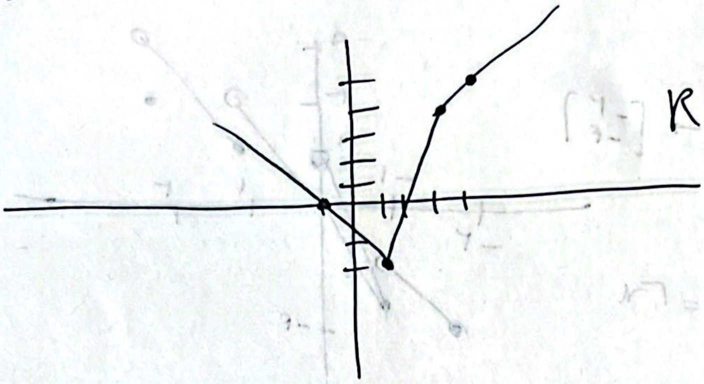
الف) $y = |2x-2| - |x-3|$

$$-1 \qquad 1 \qquad 3 \qquad 4$$

$|2\times(-1)-2| - |-1-3|$ $\qquad$ $|2\times1-2| - |1-3|$ $\qquad$ $|2\times3-2| - |3-3|$ $\qquad$ $|2\times4-2| - |4-3|$

$+4-4=0$ $\qquad$ $\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$

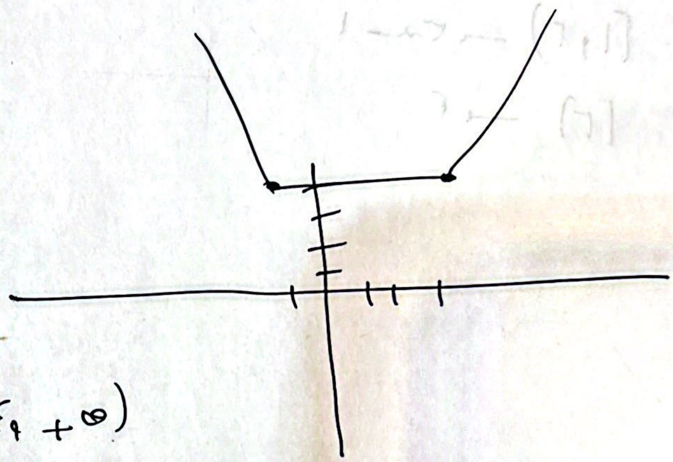
$\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$



$R = [-2, +\infty)$

ب) $y = |x-3| + |x+1|$

$\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$



$R_f = [4, +\infty)$

سوال ۸

$y = |x-2| - |2x+2| \leq 1$

$$-1 \qquad 2$$

$-x+2+2x+2 \leq 1$ $\qquad$ $-x+2-2x-2$ $\qquad$ $x-2-2x+2$

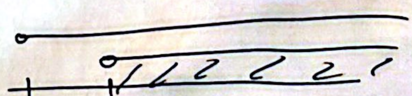
$x \leq -3$ (۲) $\qquad$ $-3x \leq 1$ $\qquad$ $-x-4 \leq 1$

$x \geq -\frac{1}{3}$ $\qquad$ $-x \leq 5$

$x \geq -5$

$(-\infty, -3] \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$

(۱) $\cup$ (۲)



$-5 \qquad -\frac{1}{3}$

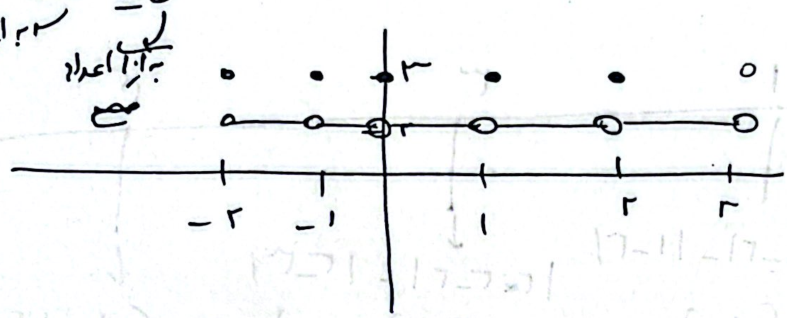
اشتراک (۱)

حل ۹

الف) $[x] + ۳ + \underbrace{[-x]}_{۰ \text{ یا } -۱}$

-۱ به ازای اعداد غیر صحیح

۰ به ازای اعداد صحیح



ب) $y = [۲x] - [x]$

$[-۲, ۲]$

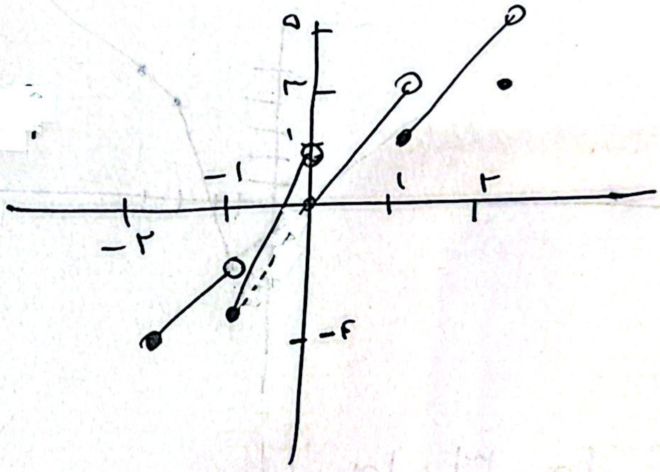
$[-۲, -۱) \to ۲x + ۲$

$[-۱, ۰) \to ۲x + ۱$

$[۰, ۱) \to ۲x + ۰ = ۲x$

$[۱, ۲) \to ۲x - ۱$

$[۲] \to ۴$



سوال ۱۰

الف) $y = \sin^2 x - \sin x + 1$

$\sin x = 1 \longrightarrow 1 - 1 + 1 = 1$

$\sin x = -1 \longrightarrow 1 + 1 + 1 = 3$

$\sin x = \frac{-b}{2a} = \frac{+1}{2} \longrightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$

$\left[\frac{3}{4} , 3\right]$

ب) $y = \sin^4 x + \sin^2 x + 1$

$\sin^2 x = 0 \longrightarrow 0 + 0 + 1 = 1$

$\sin^2 = 1 \longrightarrow 1 + 1 + 1 = 3$

$[1 , 3]$

$\sin^2 = \frac{-b}{2a} \longrightarrow = -\frac{1}{2}$ ∝ غقق