قواعد خواص توابع ها

«مطهره کمیلی» دهم تجربی 13 — ۱۹/۲۵ آفرین!

سؤال ۱ ← (۲)

$y = \frac{x^2+x+2}{x-1} \rightarrow yx - y = x^2+x+2 \rightarrow 0 = x^2 + (1-y)x + 2+y$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x = \frac{-1+y \pm \sqrt{(1-y)^2 - 4(2+y)}}{2} \Rightarrow \Delta \geq 0 \rightarrow (1-y)^2 - 4(2+y) \geq 0$

$\Rightarrow 1+y^2-2y-8-4y \geq 0 \rightarrow y^2-6y-7 \geq 0 \rightarrow (y-7)(y+1) \geq 0$ -1, $+7$: $+ \; - \; +$

$R_f = (-\infty, -1] \cup [+7, +\infty)$ ✓

سؤال ۲ ← (۲)

الف) $y = 2x^2 - 5x + 1 \xrightarrow{a>0} x_{min} = \frac{-b}{2a} = \frac{+5}{4}$, $y_{min} = \frac{-17}{8}$ $\Rightarrow R_f = [\frac{-17}{8}, +\infty)$ ✓

ب) $y = \sqrt{-x^2+4x-5} \rightarrow (-x^2+4x-5)$ → $x_{max} = \frac{-b}{2a} = 3$ → $y_{max} = 4$ $R_f = (-\infty, 4]$ → $R_{\sqrt{f}} = [0, 2]$ (جواب اصلی) ✓

ج) $\sqrt{x^5 - 3x^3 + 4x + 1} \rightarrow (x^5 - 3x^3 + 4x + 1)$ برد تمام چندجمله‌ای‌هایی که بزرگترین توان آن فرد است R می‌باشد → $R_f = \mathbb{R}$ $\Rightarrow R_{\sqrt{f}} = [0, +\infty)$ ✓

د) $\log(x^3 - 6x^2 + 7x + 4)$ ← برد R است

چون چندجمله‌ای درجه فرد است پس ورودی لگاریتم هر عددی می‌تواند باشد با توجه به این موضوع پس برد لگاریتم هم $\mathbb{R}$ می‌شود $R_f = \mathbb{R}$ ✓

سؤال ۳ ← (۱/۵)

الف) $y = \frac{3x+2}{2x-6} \rightarrow R_f = R - \{\frac{a}{c}\} = \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$ ✓

ب) $y = \sqrt{\frac{4x+1}{x-2}} \rightarrow R_f = R - \{\frac{a}{c}\} = \mathbb{R} - \{4\} \xrightarrow{\text{رادیکال می‌گیریم}} R_{\sqrt{f}} = [0, +\infty) - \{2\}$ ✓

ج) $y = \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+3}} \rightarrow \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} = \sqrt{x^2+3} + \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \Rightarrow t + \frac{1}{t}, t>0 \Rightarrow R = [2, +\infty)$

← اما کمترین مقداری که t می‌تواند داشته باشد $x=0 \rightarrow \sqrt{3}$ → $R_f = [\sqrt{3}, +\infty)$

$x=0 \rightarrow y = \frac{4}{\sqrt{3}}$ $R_f = [\frac{4\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

د) $x^2 + \frac{1}{x^2+4} + 4 - 4 \rightarrow (x^2+4 + \frac{1}{x^2+4}) - 4 \rightarrow \overset{f(x)}{(t + \frac{1}{t})} - 4 \Rightarrow R_{f(x)} = [2, +\infty)$

$t>0$ $R_{f(x)-4} = [0, +\infty)$ (جواب اصلی)

$x=0 \rightarrow t=4$ ← کمترین مقدار t $\frac{1}{4}$

$R_f = [\frac{1}{4}, +\infty)$

سؤال ۴ ← (۲)

(روش اصلی) $y = \frac{3x^2+4}{x^2-1} \rightarrow yx^2 - y = 3x^2 + 4 \rightarrow 3x^2 - yx^2 + y + 4 = 0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$(3-y)x^2 + y + 4 = 0$

$\Delta = 0^2 - 4(y+4)(3-y) \geq 0 \leftarrow \Delta > 0$

-4, 3: $+ \; - \; +$ → $(-\infty, -4], [3, +\infty)$

$R_f = R - [-4, 3]$

(روش دوم) → اسرمریع → $x^2 = +\infty \rightarrow \frac{3x^2}{x^2} = 3$; $x^2 = 0 \rightarrow \frac{3 \times 0 + 4}{0-1} = -4$ → $R_f = R - [-4, 3]$

مخرج صفر می‌شود پس خارج از دو نقطه می‌گیریم

$(-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$ ✓

سوال ۵ ← ②

(روش تذکر) ← □ → $max = 1 \quad \frac{2\times 1 - 1}{1+3} = \frac{1}{4}$; → $min = -1 \quad \frac{2\times -1 - 1}{-1+3} = \frac{-3}{2}$ $\} \Rightarrow R_f = [-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}]$

(روش اصلی) ← $y = \frac{2\sin x - 1}{\sin x + 3} \rightarrow y\sin x + 3y = 2\sin x - 1 \rightarrow (y-2)\sin x = -3y-1$

$\rightarrow \sin x = \frac{-3y-1}{y-2} \Rightarrow -1 \leq \frac{-3y-1}{y-2} \leq 1 \rightarrow -1 \leq \frac{-3y-1}{y-2}$; $\frac{-3y-1}{y-2} \leq 1$ $\}$ ∩ $\Rightarrow [-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}]$ ✓

سوال ۶ ← ②

$f(x) = \frac{x^2 - x + \frac{1}{4}}{x^2 - x + 1} \longrightarrow \Delta_{مخرج} < 0 \longrightarrow$ ریشه ندارد $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$□ = \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$ → □ $max = +\infty \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty} = 1$; → □ $min = 0 \rightarrow \frac{0}{0+\frac{3}{4}} = 0$

$R_f = [0, 1]$ ✓ ← خود کمی شبیه به ① میل می‌کند

سوال ۷ ← ②

الف) $|2x-2| - |x-3| = y$

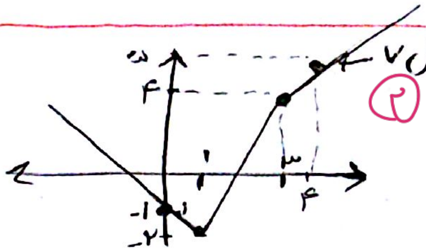
+۱ ، +۳

$-2x+2+x-3$ → $-x-1$ ②

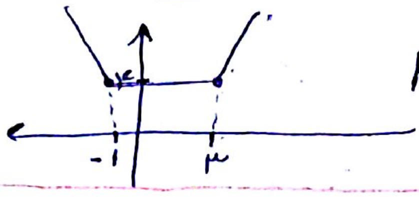
$2x-2+x-3$ → $3x-5$ ③

$2x-2-x+3$ → $x+1$

$R = [-2, +\infty)$ ✓



ب) $y = |x-3| + |x+1|$



$R = [4, +\infty)$ ✓

سوال ۸ ← ②

$|x-2| - |2x+2| \leq 1$

−۱ ، +۲

$-x+2+2x+2$ → $x+4 \leq 1$ ✓ → $x \leq -3$ → $(-\infty, -3]$

$x-2+2x+2$ → $-3x \leq 1$ → $x \leq -\frac{1}{3}$ → $[-1, -\frac{1}{3}]$

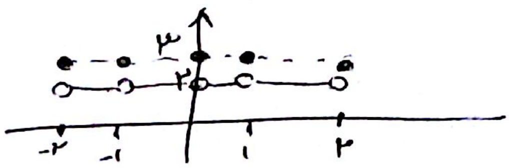
$x-2-2x-2$ → $x-4 \leq 1$ → $x \leq 5$ → $[2, 5]$

$(-\infty, -3] \cup [-1, -\frac{1}{3}] \cup [2, 5]$ ←

سوال ۹ ← ②

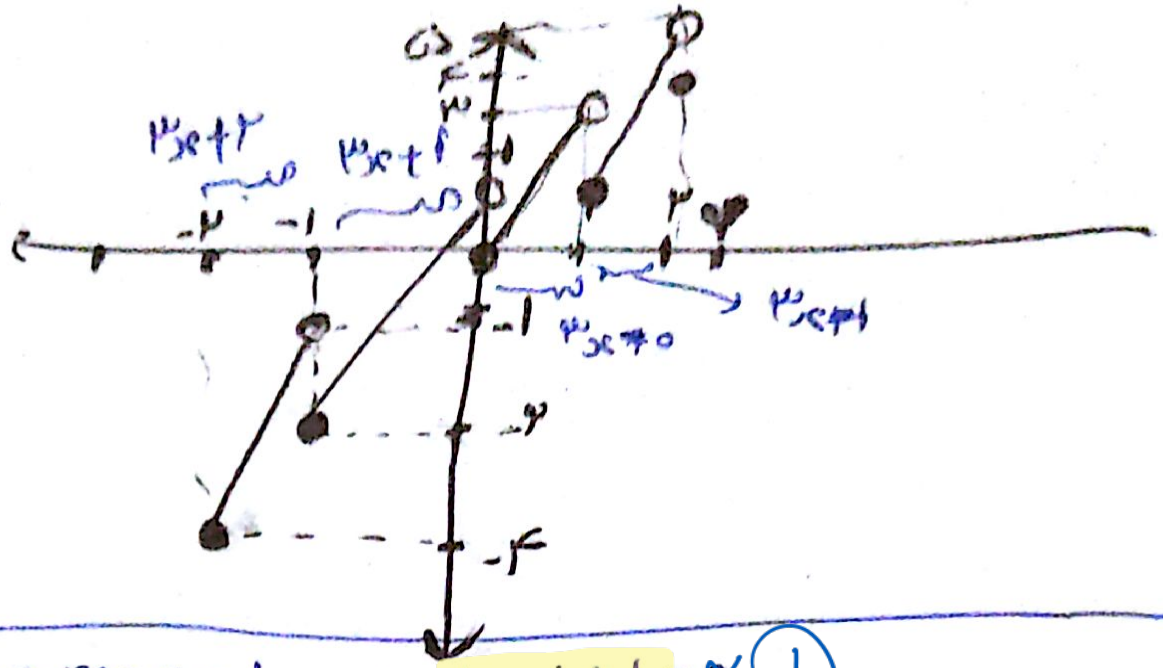
الف) $y = [x] + 3 + [-x]$

$R = \{2, 3\}$ ✓



$3x+2$

$y = x^2 - [x]$ ⟶



$R = [-F, \infty)$ ✓

سوال ۱۰ ← (۱/۷۵)

$y = \sin^2 x - \sin x + 1$

- max = 1 ⟶ $1 - 1 + 1 = \alpha$ (1)
- min = -1 ⟶ $1 + 1 + 1 = 3$
- $-\frac{b}{2a} = \frac{+2}{2} \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$

⟶ $R_f = [0, 3]$

$Rf = [\frac{3}{4}, 1]$

$y = \sin^4 x + \sin^2 x + 1$

- max = 1 ⟶ $1 + 1 + 1 = 3$
- min ≠ -1 ⟶ min = 0 ⟶ $0 + 0 + 1 = 1$
- $-\frac{b}{2a} = \frac{-1}{2}$ ∈ α

$R_f = [1, 3]$ ✓