توابع و خواص آن‌ها

دختران نظام B

«مطهره کمیلی»

سوال ۱ ←

$y = \frac{x^۲+x+۲}{x-۱} \rightarrow yx - y = x^۲+x+۲ \longrightarrow ۰ = x^۲ + (۱-y)x + ۲ + y$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} \rightarrow x = \frac{-۱+y \pm \sqrt{(۱-y)^۲ - ۴(۲+y)}}{۲} \Longrightarrow \Delta \geq ۰ \rightarrow (۱-y)^۲ - ۴(۲+y) \geq ۰$

$\Rightarrow ۱ + y^۲ - ۲y - ۸ - ۴y \geq ۰ \longrightarrow y^۲ - ۶y - ۷ \geq ۰ \longrightarrow (y-۷)(y+۱) \geq ۰$

$-۱ \quad +۷$

$+ \quad - \quad +$

$R_f = (-\infty, -۱] \cup [+۷, +\infty)$

سوال ۲ ←

الف) $y = ۲x^۲ - ۵x + ۱ \xrightarrow{a>۰} x_{min} = \frac{-b}{۲a} = \frac{+۵}{۴}$

$y_{min} = \frac{-۱۷}{۸}$

$\Rightarrow R_f = [\frac{-۱۷}{۸}, +\infty)$

ب) $y = \sqrt{-x^۲+۶x-۵} \longrightarrow (-x^۲+۶x-۵)$

$\rightarrow x_{max} = \frac{-b}{۲a} = ۳$

$\rightarrow y_{max} = ۴$

$R_f = (-\infty, ۴]$

$R_{\sqrt{f}} = [۰, ۲]$

جواب اصلی

ج) $\sqrt{x^۷ - ۳x^۲ + ۴x + ۱} \longrightarrow (x^۷ - ۳x^۲ + ۴x + ۱)$ برد تمام چندجمله‌ای‌ها که بزرگترین توان آن فرد است R می‌باشد

$\hookrightarrow R_f = \mathbb{R}$

$\Rightarrow R_{\sqrt{f}} = [۰, +\infty)$

د) $\log(x^۳ - ۶x^۲ + ۷x + ۴)$

برد R است

چون چندجمله‌ای درجه فرد است پس ورودی لگاریتم هر عددی می‌تواند باشد با توجه به این موضوع پس برد لگاریتم هم $\mathbb{R}$ می‌شود $R_f = \mathbb{R}$

سوال ۳ ←

الف) $y = \frac{۳x+۱}{۲x-۶} \longrightarrow R_f = R - \{\frac{a}{c}\} = \mathbb{R} - \{\frac{۳}{۲}\}$

ب) $y = \sqrt{\frac{۴x+۱}{x-۲}} \longrightarrow R_f = R - \{\frac{a}{c}\} = \mathbb{R} - \{۴\} \longrightarrow R_{\sqrt{f}} = [۰, +\infty) - \{۲\}$

$\sqrt{}$ می‌گیریم

ج) $y = \frac{x^۲+۴}{\sqrt{x^۲+۳}} \rightarrow \frac{x^۲+۳}{\sqrt{x^۲+۳}} + \frac{۱}{\sqrt{x^۲+۳}} = \sqrt{x^۲+۳} + \frac{۱}{\sqrt{x^۲+۳}} \Rightarrow t + \frac{۱}{t}, t > ۰ \Rightarrow R = [۲, +\infty)$

← اما کمترین مقداری که t می‌تواند داشته باشد $= \sqrt{۳}$ ← $x = ۰ \rightarrow$

$R_f = [\sqrt{۳}, +\infty) \longleftarrow$

د) $x^۲ + \frac{۱}{x^۲+۴} + ۴ - ۴ \longrightarrow (x^۲ + ۴ + \underbrace{\frac{۱}{x^۲+۴}}_{t}) - ۴ \longrightarrow \overset{f(x)}{(t + \frac{۱}{t})} - ۴ \Rightarrow R_{f(x)} = [۲, +\infty)$

$t > ۰ \quad R_{f(x)-۴} = [۰, +\infty)$

$x = ۰ \rightarrow t = ۴ \longleftarrow$ کمترین مقدار t

جواب اصلی

سوال ۴ ←

(روش اصلی) $y = \frac{۳x^۲+۴}{x^۲-۱} \longrightarrow yx^۲ - y = ۳x^۲ + ۴ \longrightarrow ۳x^۲ - yx^۲ + y + ۴ = ۰$

$(۳-y)x^۲ + y + ۴ = ۰$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$

$\Delta > ۰$

$\Delta = ۰^۲ - ۴(y+۴)(۳-y) \geq ۰ \longleftarrow$

$(-\infty, -۴], [۳, +\infty)$

$R_f \overset{R}{=} [-۴, ۳]$

$-۴ \quad ۳$

$+ \quad - \quad +$

(روش دوم) ← اسرمربع

$\rightarrow x^۲ = +\infty \rightarrow \frac{۳\infty}{\infty} = ۳$

$\rightarrow x^۲ = ۰ \rightarrow \frac{۳\times۰+۴}{۰-۱} = -۴$

$\longrightarrow R_f(R - [-۴, ۳])$

مخرج صفر می‌شود پس خارج را در نظر می‌گیریم

$(-\infty, -۴] \cup [۳, +\infty)$

سوال ۵ ←

روش تستی) → $\square \xrightarrow{} max = ۱ \quad \frac{۲\times۱-۱}{۱+۳} = \frac{۱}{۴}$

$\hookrightarrow min = -۱ \quad \frac{۲\times-۱-۲}{-۱+۳} = \frac{-۳}{۲}$

$\Rightarrow R_f = [-\frac{۳}{۲}, \frac{۱}{۴}]$

روش اصلی) → $y = \frac{۲\sin x - ۱}{\sin x + ۳} \longrightarrow y\sin x + ۳y = ۲\sin x - ۱ \longrightarrow (y-۲)\sin x = -۳y-۱$

$\longrightarrow \sin x = \frac{-۳y-۱}{y-۲} \Longrightarrow -۱ \leq \frac{-۳y-۱}{y-۲} \leq ۱ \longrightarrow -۱ \leq \frac{-۳y-۱}{y-۲}$, $\frac{-۳y-۱}{y-۲} \leq ۱$ $\Big\} \cap \Rightarrow [-\frac{۳}{۲}, \frac{۱}{۴}]$

سوال ۶ ←

$f(x) = \frac{x^۲ - x + \frac{۱}{۴}}{x^۲ - x + ۱} \longrightarrow \underset{\text{مخرج}}{\Delta} < ۰ \longrightarrow$ ریشه ندارد $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$\square = $

$\hookrightarrow \frac{(x-\frac{۱}{۲})^۲}{(x-\frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۳}{۴}}$

$\square max = +\infty \longrightarrow \frac{+\infty}{+\infty} = ۱$

$\square min = ۰ \longrightarrow \frac{۰}{۰+\frac{۳}{۴}} = ۰$

$R_f = [۰, ۱) \longrightarrow$ خود ۱ نمی‌شه به ۱ میل می‌کنه

سوال ۷ ←

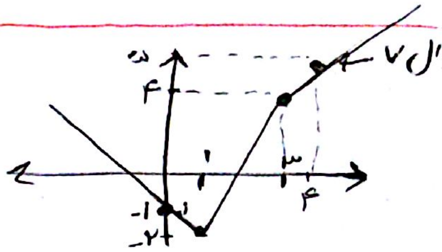
الف) $|۲x-۲| - |x-۳| = y$

$+۱ \qquad +۳$

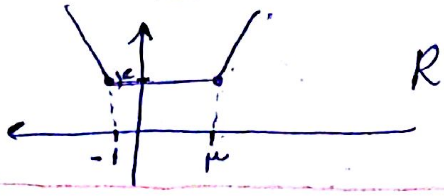
$-۲x+۲+x-۳ \qquad ۲x-۲+x-۳ \qquad ۲x-۲-x+۳$

$\boxed{-x-۱}$ ⓶- $\quad \boxed{۳x-۵}$ ④ $\quad \boxed{x+۱}$

$R = [-۲, +\infty)$



ب) $y = |x-۳| + |x+۱|$



$R = [۴, +\infty)$

سوال ۸ ←

$|x-۲| - |۲x+۲| \leq ۱$

$-۱ \qquad +۲$

$-x+۲+۲x+۲ \qquad x-۲+۲x+۲ \qquad x-۲-۲x-۲$

$x+۴ \leq ۱$ ✓ $\qquad -۳x \leq ۱ \qquad -x-۴ \leq ۱$

$x \leq -۳ \qquad x \geq -\frac{۱}{۳} \qquad x \geq -۵$

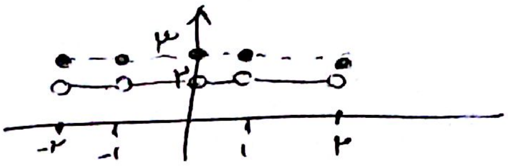
$(-\infty, -۳] \quad \cup \quad [-۱, -\frac{۱}{۳}] \quad \cup \quad [۲, ۵] \longrightarrow (-\infty, -۳] \cup [-۱, -\frac{۱}{۳}]$

$\cup [۲, ۵]$

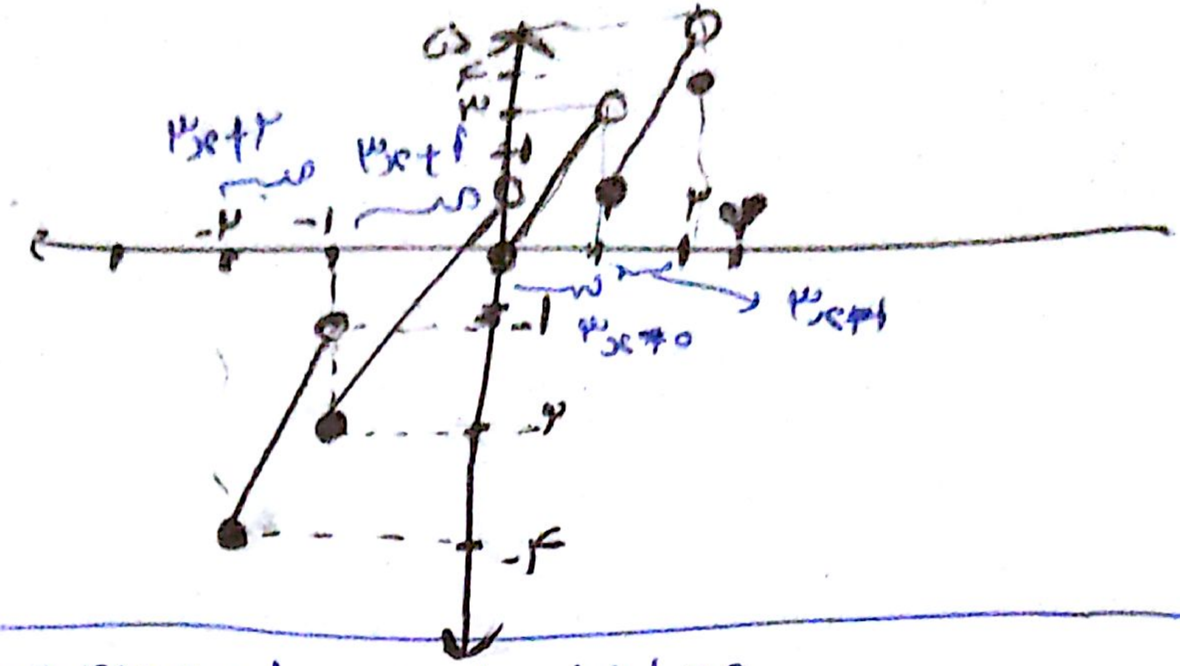
سوال ۹ ←

الف) $y = [x] + ۳ + [-x]$

$R = \{۲, ۳\}$



$y = ۳x - [x] \longrightarrow$



$R = [-۴, ۵)$

سوال ۱۰ ←

$y = \sin^۲ x - \sin x + 1$
- $\rightarrow \max = 1 \longrightarrow 1 - 1 + 1 = 0$
- $\rightarrow \min = -1 \longrightarrow 1 + 1 + 1 = ۳$
- $\rightarrow -\frac{b}{۲a} = +\frac{۲}{۴} \rightarrow \frac{1}{۴} - \frac{1}{۲} + 1 = \frac{۳}{۴}$

$\longrightarrow R_f = [0, ۳]$

$y = \sin^۴ x + \sin^۲ x + 1$
- $\rightarrow \max = 1 \longrightarrow 1 + 1 + 1 = ۳$
- $\rightarrow \min \neq -1 \notin \longrightarrow \min = 0 \longrightarrow 0 + 0 + 1 = 1$
- $\rightarrow -\frac{b}{۲a} = \frac{-1}{۲} \notin x$

$R_f = [1, ۳]$