نیکا بات — تکالیف شماره ۳

۱ـ $y=\frac{x^۲+x+۲}{x-۱} \longrightarrow yx-y=x^۲+x+۲ \longrightarrow x^۲+x(۱-y)+۲+y=۰$

$\Delta=b^۲-۴ac=(۱-y)^۲-۴(۲+y)=۱+y^۲-۲y-۸-۴y \longrightarrow y^۲-۶y-۷$

$x=\frac{y-۱\pm\sqrt{y^۲-۶y-۷}}{۲} \longrightarrow \Delta\geqslant۰ \longrightarrow y^۲-۶y-۷\geqslant۰$

$(y-۷)(y+۱)\geqslant۰$

	-۱		۷	
+	۰	−	۰	+

$R_f \to (-\infty,-۱]\cup[۷,+\infty)$

۲ـ الف) $y=۲x^۲-۵x+۱ \longrightarrow \left|\begin{array}{l}\frac{-b}{۲a}=\frac{۵}{۴}\\ \frac{-۱۷}{۸}\end{array}\right. \longrightarrow R_f=[\frac{-۱۷}{۸},+\infty)$

$\longrightarrow ۲(\frac{۵}{۴})^۲-۵(\frac{۵}{۴})+۱=\frac{-۱۷}{۸}$ Min دارد

ب) $y=\sqrt{-x^۲+۶x-۵}$ $\left|\begin{array}{l}\frac{-b}{۲a}=\frac{-۶}{-۲}=۳\\ ۴\end{array}\right. \longrightarrow R_f=\sqrt{(-\infty,۴]}=[۰,۲]$

$-(۳)^۲+۶(۳)-۵=۴$ Max دارد.

ج) $y=\sqrt{x^۷-۳x^۲+۴x+۱} \longrightarrow R_f=[۰,+\infty)$

برد عبارت زیر رادیکال $\mathbb{R}$ است
و فقط زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی
صفر باشد.

د) $y=\log(\underbrace{x^۳-۶x^۲+۷x+۴}_{\text{برد عبارت } \mathbb{R} \text{ است.}}) \longrightarrow R_f=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

۳ـ الف) $y=\frac{۳x+۱}{۲x-۶} \longrightarrow ۲xy-۶y=۳x+۱ \longrightarrow ۳x-۲xy+۶y+۱=۰$

$\longrightarrow x(۳-۲y)+۶y+۱=۰ \longrightarrow x=\frac{۶y+۱}{۲y-۳} \longrightarrow ۲y-۳\neq۰ \longrightarrow y\neq\frac{۳}{۲}$

$R_f \longrightarrow R-\{\frac{۳}{۲}\}$

ب) $y=\sqrt{\frac{۴x+۱}{x-۲}}$ $R_f=[۰,+\infty)-\{۲\}$

$y^۲=\frac{۴x+۱}{x-۲} \longrightarrow y^۲x-۲y^۲=۴x+۱ \longrightarrow ۴x-y^۲x=-۲y^۲-۱ \longrightarrow$

$x(۴-y^۲)=-۲y^۲-۱ \longrightarrow x=\frac{۲y^۲+۱}{y^۲-۴} \longrightarrow \boxed{y>۰}\ \boxed{y\neq۲}$

[illegible]

ج) $y = \dfrac{x^۲+۴}{\sqrt{x^۲+۳}} = \dfrac{x^۲+۳+۱}{\sqrt{x^۲+۳}} = \dfrac{x^۲+۳}{\sqrt{x^۲+۳}} + \dfrac{۱}{\sqrt{x^۲+۳}}$

$= \sqrt{x^۲+۳} + \dfrac{۱}{\sqrt{x^۲+۳}} \xrightarrow[\text{کمترین مقدار: ازای } x^۲=۰]{x^۲=۰} \sqrt{۳} + \dfrac{۱}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۳} + \dfrac{\sqrt{۳}}{۳} = \dfrac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

$R_f = \left[\dfrac{۴\sqrt{۳}}{۳}, +\infty\right)$

د) $y = x^۲ + \dfrac{۱}{x^۲+۴} \xrightarrow[x^۲=۰]{\text{کمترین مقدار در ازای}} ۰ + \dfrac{۱}{۰+۴} = \dfrac{۱}{۴} \longrightarrow R_f = \left[\dfrac{۱}{۴}, +\infty\right)$

۴-

$y = \dfrac{۳x^۲+۴}{x^۲-۱}$

روش اصلی $\longrightarrow yx^۲ - y = ۳x^۲ + ۴ \longrightarrow ۳x^۲ - yx^۲ = -y-۴ \longrightarrow x^۲(۳-y) = -y-۴$

$\longrightarrow x^۲ = \dfrac{y+۴}{y-۳} \longrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{y+۴}{y-۳}} \longrightarrow \dfrac{y+۴}{y-۳} \geq ۰$

$\begin{array}{ccccc} & -۴ & & ۳ & \\ + & | & - & | & + \end{array}$

$\longrightarrow R_f = (-\infty, -۴] \cup (۳, +\infty)$

راه دوم $\longrightarrow y = \dfrac{۳x^۲+۴}{x^۲-۱}$ $\xrightarrow{x^۲=۰} \dfrac{۴}{-۱} = -۴$ $\quad R_f = (-\infty, -۴] \cup (۳, +\infty)$

$\xrightarrow{x^۲=+\infty} ۳$ چون ریشه مخرج دارد پس خارج دو عدد بازه را می‌نویسیم.

۵-

$y = \dfrac{۲\sin x - ۱}{\sin x + ۳}$

روش اصلی $\longrightarrow y\sin x + ۳y = ۲\sin x - ۱ \longrightarrow ۲\sin x - y\sin x = ۳y + ۱$

$\sin x(۲-y) = ۳y+۱ \longrightarrow \sin x = \dfrac{۳y+۱}{۲-y} \longrightarrow -۱ \leq \dfrac{۳y+۱}{۲-y} \leq ۱$

$\longrightarrow \dfrac{۳y+۱}{۲-y} \geq -۱ \longrightarrow \dfrac{۳y+۱}{۲-y} + ۱ \geq ۰ \longrightarrow \dfrac{۲y+۳}{۲-y} \geq ۰$

$\begin{array}{ccccc} & -\frac{۳}{۲} & & ۲ & \\ - & | & + & | & - \end{array}$

$I \longrightarrow \left[-\dfrac{۳}{۲}, ۲\right)$

$\longrightarrow \dfrac{۳y+۱}{۲-y} \leq ۱ \longrightarrow \dfrac{۳y+۱}{۲-y} - ۱ \leq ۰ \longrightarrow \dfrac{۴y-۱}{۲-y} \leq ۰$

$\begin{array}{ccccc} & \frac{۱}{۴} & & ۲ & \\ - & | & + & | & - \end{array}$ II

$\left(-\infty, \dfrac{۱}{۴}\right] \cup (۲, +\infty)$

$I \cap II = \left[-\dfrac{۳}{۲}, \dfrac{۱}{۴}\right]$ جواب

راه دوم $\longrightarrow y = \frac{۲\sin x - ۱}{\sin x + ۳}$ $\xrightarrow{\sin x = ۱} \frac{۲-۱}{۱+۳} = \frac{۱}{۴}$ نکته مثبت

$\xrightarrow{\sin x = -۱} \frac{-۲-۱}{-۱+۳} = \frac{-۳}{۲} \longrightarrow R_f \longrightarrow \left[\frac{-۳}{۲}, \frac{۱}{۴}\right]$

← مخرج ریشه ندارد.

$$f(x) = \frac{x^۲ - x + \frac{۱}{۴}}{x^۲ - x + ۱} \longrightarrow yx^۲ - yx + y = x^۲ - x + \frac{۱}{۴}$$ ۶ -

$$\longrightarrow x^۲ - yx^۲ - x + xy + \frac{۱}{۴} - y = ۰ \longrightarrow x^۲(۱-y) + x(y-۱) - y + \frac{۱}{۴} = ۰$$

$$x = \frac{۱ - y \pm \sqrt{(y-۱)^۲ - ۴(۱-y)(\frac{۱}{۴} - y)}}{۲(۱-y)} \longrightarrow \boxed{y \neq ۱}$$

$\Delta \geqslant ۰$

$$\longrightarrow (y-۱)^۲ - ۴(۱-y)(\frac{۱}{۴} - y) \geqslant ۰$$

$$y^۲ + ۱ - ۲y - ۴y^۲ + ۵y - ۱ \geqslant ۰$$

$$\longrightarrow -۳y^۲ + ۳y \geqslant ۰ \longrightarrow ۳y^۲ - ۳y \leqslant ۰ \longrightarrow ۳y(y-۱) \leqslant ۰$$

	۰		۱	
+		−	ق	+

$[۰, ۱)$ ←

$R_f = \{۰\} \longrightarrow$ بازه $[۰, ۱)$ شامل یک عدد صحیح است

$D_f \longrightarrow x^۲ - x + ۱ \neq ۰ \longrightarrow \Delta < ۰ \longrightarrow ۱ - ۴(۱)(۱) = -۳$ ✓

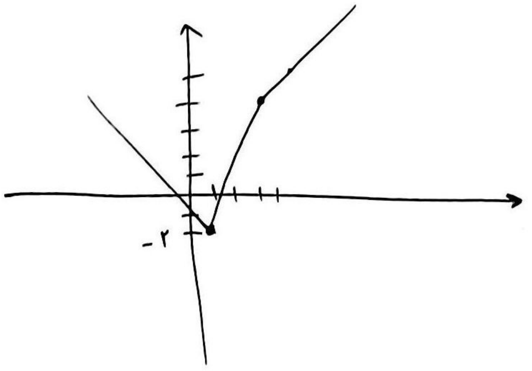
← $\Delta < ۰$ و ریشه ندارد
پس هیچگاه صفر نمی‌شود

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}}$$

الف) $y = |۲x - ۲| - |x - ۳|$ ۷ -

۱		۳	
$۲ - ۲x - ۳ + x$	$۲x - ۲ - ۳ + x$		$۲x - ۲ - x + ۳$
$\boxed{-x - ۱}$	$\boxed{۳x - ۵}$		$\boxed{x + ۱}$

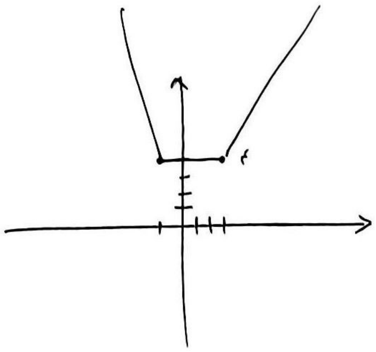
$\begin{array}{|l} ۱ \\ -۲ \end{array}$ $\begin{array}{|l} ۳ \\ ۴ \end{array}$



$R_f = [-۲, +\infty)$

ب) $y = |x - ۳| + |x + ۱|$

$\begin{array}{|l} ۳ \\ ۴ \end{array}$ $\begin{array}{|l} -۱ \\ ۴ \end{array}$



$R_f = [۴, +\infty)$

[illegible]

۸ −

$$|x-۲|-|۲x+۲| \leq ۱$$

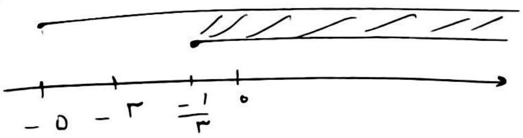
−۱ ، ۲

$۲-x-(-۲x-۲) \leq ۱$ | $۲-x-۲x-۲ \leq ۱$ | $x-۲-۲x-۲ \leq ۱$

$۲-x+۲x+۲ \leq ۱$ | $-۳x \leq ۱$ | $-x-۴ \leq ۱ \longrightarrow \boxed{x \geq -۵}$ I

$x+۴ \leq ۱$ | $\boxed{x \geq \frac{-۱}{۳}}$ II

III $\boxed{x \leq -۳}$



$$R_f \longrightarrow [\frac{-۱}{۳}, +\infty) \cup [-\infty -۳]$$

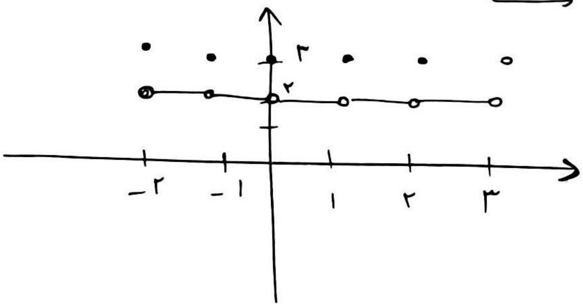
---

۹ −

الف) $y = [x] + [۳-x] = [x] + [-x] + ۳$ $\begin{cases} \longrightarrow ۳ \\ \longrightarrow ۲ \end{cases}$

$[x]+[-x] \begin{cases} \xrightarrow{x \in Z} ۰ \\ \xrightarrow{x \notin Z} -۱ \end{cases}$

در بازه $[-۲,۲]$



ب) $y = ۳x - [x]$

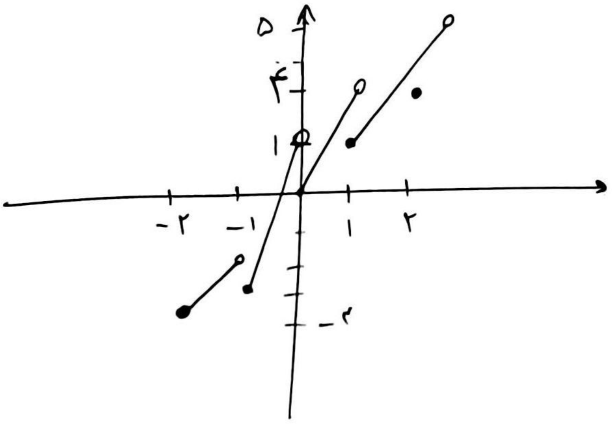
$[-۲,-۱) \longrightarrow ۳x+۲$

$[-۱,۰) \longrightarrow ۳x+۱$

$[۰,۱) \longrightarrow ۳x+۰ = ۳x$

$[۱,۲) \longrightarrow ۳x-۱$

$x = ۲ \longrightarrow ۴$



---

۱۰ −

الف) $y = \sin^۲ x - \sin x + ۱ \xrightarrow{\sin x = ۱} ۱-۱+۱ = ①$

$\xrightarrow{\sin x = -۱} ۱+۱+۱ = \textcircled{۳}$

$\xrightarrow{\sin x = \frac{-b}{۲a} = \frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲} + ۱ = \boxed{\frac{۳}{۴}}$

$$R_f \rightarrow [\frac{۳}{۴}, ۳]$$

ب) $y = \sin^۴ x + \sin^۲ x + ۱ \xrightarrow{\sin^۲ x = ۰} ۰+۰+۱ = ①$

$\xrightarrow{\sin^۲ x = ۱} ۱+۱+۱ = \textcircled{۳}$

$\xrightarrow{\sin^۲ x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۱}{۲}}$

غ ق ق X

$$R_f \rightarrow [۱, ۳]$$