آزالمائی کیا - تکلیف ۳.

۱- $y(x-1)=x^2+x+2 \Rightarrow yx-y=x^2+x+2 \rightarrow x^2+x(1-y)+2+y=0 \rightarrow x=\frac{-(1-y)\pm\sqrt{\Delta}}{2}$

$\Delta\geq 0 \Rightarrow (1-y)^2-4(1)(2+y)\geq 0 \Rightarrow 1+y^2-2y-8-4y\geq 0 \rightarrow y^2-6y-7\geq 0$

$(y-7)(y+1)\geq 0$ $\quad \begin{array}{c} -1 \quad 7 \\ + \,|\, - \,|\, + \end{array} \Rightarrow$ برد $: (-\infty,-1]\cup[7,+\infty)$

۲- الف) $2x^2-5x+1=y$ $\quad \begin{cases} x_{min}=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-5)}{2(2)}=\frac{5}{4} \\ y_{min}=2(\frac{5}{4})^2-5(\frac{5}{4})+1=\frac{25}{8}-\frac{25}{4}+1=\frac{-25}{8}+1=\frac{-17}{8} \Rightarrow [-\frac{17}{8},+\infty) \end{cases}$

۲- ب) $y=\sqrt{-x^2+6x-5} \xrightarrow{a<0} \begin{cases} x_{max}=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{2(-1)}=3 \\ y_{max}=-(3)^2+6(3)-5=4 \end{cases} \Rightarrow R=\sqrt{(-\infty,4]}=[0,2]$

۲- ج) $y=\sqrt{x^4-2x^2+4x+1} \Rightarrow R_f=[0,+\infty)$

۲- د) $\log(x^3-6x^2+7x+4) \Rightarrow R_f=(-\infty,+\infty)$

۳- الف) $y=\frac{3x+1}{2x-6} \rightarrow \mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\} \Rightarrow R_f=\mathbb{R}-\{\frac{3}{2}\}$

۳- ب) $y=\sqrt{\frac{4x+1}{x-2}} \rightarrow \sqrt{\mathbb{R}-\{\frac{4}{1}\}} \rightarrow R_f=[0,+\infty)-\{2\}$

۳- ج) $y=\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \Rightarrow \sqrt{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ به ازای $x=0$ این تابع کمترین مقدار را دارد $\xrightarrow{x=0} \sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}} \rightarrow [\frac{4}{\sqrt{3}},+\infty)$

۳- د) $x^2+4+\frac{1}{x^2+4}-4 \quad \xrightarrow{\text{if } x=0 \rightarrow x^2+4=4} [4+\frac{1}{4}-4,+\infty) \Rightarrow [\frac{1}{4},+\infty)$

۴- الف) (روش اصلی) $\rightarrow 3x^2+4=yx^2-y \Rightarrow x^2(3-y)=-y-4 \Rightarrow x^2=\frac{-(y+4)}{3-y} \xrightarrow{x^2\geq 0} \frac{-(y+4)}{3-y}\geq 0$

$\Rightarrow \frac{y+4}{3-y}\leq 0$ $\quad \begin{array}{c} -4 \quad 3 \\ - \,|\, + \,|\, - \end{array} \Rightarrow (-\infty,-4]\cup(3,+\infty)$

تذکر ۲) $x=0 \rightarrow \frac{3(0)+4}{(0)^2-1}=-4 \qquad x=+\infty \rightarrow \frac{3(+\infty)+4}{(+\infty)^2-1}=3$ چون مخرج می تواند صفر بشود پس برد خارج این ۲ عدد است. $\Rightarrow (-\infty,-4]\cup(3,+\infty)$

۵- الف) (روش اصلی) $\rightarrow y\sin x+3y=2\sin x-1 \Rightarrow \sin x(y-2)=-3y-1 \Rightarrow \sin x=\frac{-3y-1}{y-2}$

$-1\leq\frac{-3y-1}{y-2}\leq 1 \rightarrow -1\leq\frac{-3y-1}{y-2} \Rightarrow \frac{-3y-1+y-2}{y-2}\geq 0 \Rightarrow \frac{-2y-3}{y-2}\geq 0$ $\quad \begin{array}{c} -\frac{3}{2} \quad 2 \\ - \,|\, + \,|\, - \end{array} \Rightarrow [-\frac{3}{2},2)$ (I)

$\rightarrow \frac{-3y-1}{y-2}\leq 1 \Rightarrow \frac{-3y-1-y+2}{y-2}\leq 1 \Rightarrow \frac{-4y+1}{y-2}\leq 0$ $\quad \begin{array}{c} \frac{1}{4} \quad 2 \\ - \,|\, + \,|\, - \end{array} \Rightarrow (-\infty,-\frac{1}{4}]\cup(2,+\infty)$ (II)

$\xrightarrow{\mathrm{I}\cap\mathrm{II}} [-\frac{3}{2},\frac{1}{4})$

تذکر ۲) $\sin x=-1 \rightarrow \frac{2(-1)-1}{(-1)+3}=\frac{-3}{2} \qquad \sin x=1 \rightarrow \frac{2(1)-1}{(1)+3}=\frac{1}{4}$ مخرج نمی تواند صفر شود $\Rightarrow [\frac{-3}{2},\frac{1}{4}]$

۶- دامنه $\rightarrow \mathbb{R}-\{$صفرکننده ی مخرج$\} \Rightarrow x^2-x+1\neq 0 \quad \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\neq 0 \Rightarrow \frac{-b\pm\sqrt{1-4(1)(1)}}{2}\neq 0 \rightarrow \Delta<0$

مخرج ریشه ندارد $\Leftarrow$ $D_f=\mathbb{R}$

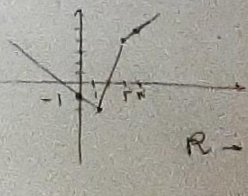
برد: $y=\frac{x^2-x+\frac{1}{4}}{x^2-x+1} \rightarrow yx^2-yx+y=x^2-x+\frac{1}{4}$

$\Rightarrow x^2(y-1)+x(-y+1)+y-\frac{1}{4} \qquad \Delta\geq 0 \rightarrow (-y+1)^2-4(y-1)(y-\frac{1}{4})\geq 0$

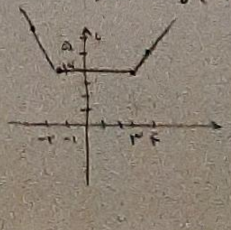
$y^2-2y+1-4y^2+5y-1\geq 0 \Rightarrow -3y^2+3y\geq 0 \Rightarrow -3y(y-1)\geq 0$ $\quad \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ - \,|\, + \,|\, - \end{array} \Rightarrow [0,1]$

۷- الف) $f(1)=-2 \quad f(4)=5$
$f(3)=4 \quad f(0)=-1$

ب) $f(3)=4 \quad f(4)=5$
$f(-1)=4 \quad f(-2)=6$

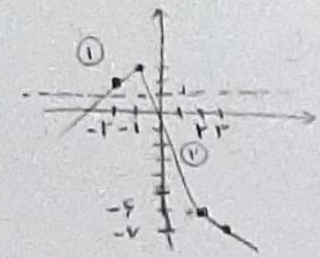


$R \rightarrow [-2,+\infty)$



$R \rightarrow [4,+\infty)$

۸- $f(۲)=-۶ \quad f(۳)=-۷$
$f(-۱)=۳ \quad f(-۲)=۲$



چون حاصل باید کوچکتر مساوی ۱ باشد طبق نمودار محل برخورد خط ۱ و ۲ را با $y=۱$ تعیین می‌کنیم و طبقات بازه مطلوب را می‌نویسیم.

خط ۱ $\rightarrow -(۲x-۲)-(-(۲x+۲))=۱ \Rightarrow x+۴=۱ \Rightarrow x=-۳$

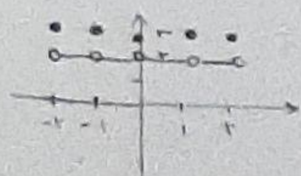
خط ۲ $\rightarrow x-۲-(-(۲x+۲))=۱ \Rightarrow ۳x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$

$D_f \rightarrow (-\infty,-۳]\cup[\frac{۱}{۳},+\infty)$

۹- الف) $[x]+[۳-x]=[x]+[-x]+۳$

$\rightarrow [x]+[-x]=۰ \quad x\in\mathbb{Z} \rightarrow [x]+[-x]+۳=۳$

$\rightarrow [x]+[-x]=-۱ \quad x\notin\mathbb{Z} \rightarrow [x]+[-x]+۳=۲$



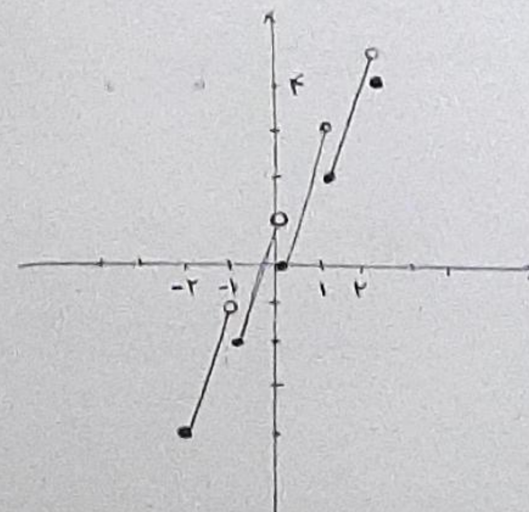
۹- ب) $۳x-[x]$

$\xrightarrow[{[x]=-۲}]{-۲\le x<-۱} ۳x-(-۲)=۳x+۲$

$\xrightarrow[{[x]=-۱}]{-۱\le x<۰} ۳x-(-۱)=۳x+۱$

$\xrightarrow[{[x]=۰}]{۰\le x<۱} ۳x-(۰)=۳x$

$\xrightarrow[{[x]=۱}]{۱\le x<۲} ۳x-(۱)=۳x-۱$



---

۱۰ الف) $\sin^۲x-\sin x+۱$

$\rightarrow \sin x=-۱ \rightarrow y=۳$

$\rightarrow \sin x=۱ \rightarrow y=۱$

$\rightarrow \sin x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۱)}{۲(۱)}=\frac{۱}{۲} \rightarrow y=\frac{۳}{۴}$

$R_f=[\frac{۳}{۴},۳]$

ب) $y=\sin^۴x+\sin^۲x+۱$

$\rightarrow \sin^۲x=۰ \rightarrow y=۱$

$\rightarrow \sin^۲x=۱ \rightarrow y=۳$

$\rightarrow \sin^۲x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(۱)}{۲(۱)}=-\frac{۱}{۲}$ غقق

$R_f=[۱,۳]$