①

$$y=\frac{x^2+x+2}{x-1} \Rightarrow yx-y=x^2+x+2 \Rightarrow x^2+(1-y)x+2+y$$

$$x=\frac{-(1-y)\pm\sqrt{(1-y)^2-4(2+y)}}{2} \Rightarrow \frac{-1+y\pm\sqrt{1+y^2-2y-8-4y}}{2}$$

$$y^2-6y-7\geqslant 0 \Rightarrow (y-7)(y+1)\geqslant 0 \Rightarrow y=7,-1$$

$$\begin{array}{ccccc} & -1 & & 7 & \\ + & | & - & | & + \end{array}$$

$$(-\infty,-1]\cup[7,+\infty)$$

---

②

الف) $y=2x^2-5x+1 \Rightarrow \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{+5}{4} \longrightarrow$

$$2\left(\frac{25}{16}\right)-5\left(\frac{5}{4}\right)+1 \Rightarrow \cancel{\frac{25}{8}-\frac{25}{4}}+1 \Rightarrow \frac{-17}{8}$$

$$\frac{-25}{8}$$

$$\min \Rightarrow \left[\frac{-17}{8},+\infty\right)$$

ب) $y=\sqrt{-x^2+6x-5} \Rightarrow \max = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{-6}{-2}=3$

$$-9+18-5=4$$

$$(-\infty,4] \Rightarrow [0,2]$$

ج) $y=\sqrt{x^7-3x^2+4x+1} \Rightarrow \sqrt{\mathbb{R}}=[0,+\infty)$

د) $\log_{10}^{x^3-6x^2+7x+4} \Rightarrow (-\infty,+\infty)$

۳

الف) $y = \frac{۳x+۱}{۲x-۴} \longrightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\} \Rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{۳}{۲}\right\}$

ب) $y = \sqrt{\frac{۴x+۱}{x-۲}} \Rightarrow \sqrt{\mathbb{R} - \{۴\}} \Rightarrow [۰, +\infty) - \{۲\}$

ج) $y = \frac{x^۲+۴}{\sqrt{x^۲+۳}} \Rightarrow \sqrt{x^۲+۳} + \frac{۱}{\sqrt{x^۲+۳}} \Rightarrow x = ۰$

$\sqrt{۳} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{۴}{\sqrt{۳}} \longrightarrow \left[\frac{۴}{\sqrt{۳}}, +\infty\right)$

د) $y = x^۲ + \frac{۱}{x^۲+۴} \Rightarrow x^۲ + ۴ + \frac{۱}{x^۲+۴} - ۴ \longrightarrow x = ۰$

$\left[\frac{۱}{۴}, +\infty\right)$

۴

$y = \frac{۳x^۲+۴}{x^۲-۱}$

$x = ۰ \longrightarrow y = -۴$

$x = \infty \Rightarrow y = ۳$

$(-\infty, -۴] \cup (۳, +\infty)$

$$y=\frac{۳x^{۲}+۴}{x^{۲}-۱} \Rightarrow yx^{۲}-y=۳x^{۲}+۴ \Rightarrow yx^{۲}-۳x^{۲}=۴+y$$

$$\Rightarrow x^{۲}(y-۳)=۴+y \Rightarrow x^{۲}=\frac{۴+y}{y-۳} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{۴+y}{y-۳}}$$

-۴		۳	
$+$	$-$		$+$

$(-\infty,-۴] \cup (۳,+\infty)$

$$y = \frac{2\sin x - 1}{\sin x + 3} \Rightarrow y\sin x + 3y = 2\sin x - 1$$

$$(y-2)\sin x = -1 - 3y$$

$$\left[-\frac{3}{2}, 2\right)$$ د

$$\sin x = \frac{-1-3y}{y-2} \Rightarrow -1 \leq \frac{+1+3y}{2-y} \leq 1$$

	$-\frac{3}{2}$		2	
$-$		$+$		$-$

$$0 \leq \frac{1+3y}{2-y} + 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1+3y+2-y}{2-y} = \frac{3+2y}{2-y} \geq 0$$

MRNOTE

$$\frac{۱+۳y}{۲-y} \leqslant ۱ \Longrightarrow \frac{۱+۳y}{۲-y} - ۱ \leqslant ۰ \Rightarrow \frac{۱+۳y-۲+y}{۲-y} \leqslant ۰$$

$$\frac{-۱+۴y}{۲-y} \leqslant ۰$$

$$\begin{array}{ccc} & \frac{۱}{۴} & ۲ \\ - & + & - \end{array}$$

$$\left(-\infty, \frac{۱}{۴}\right] \cup (۲, +\infty)$$

۲

$$۱, ۲ \quad \left[\frac{-۳}{۲}, \frac{۱}{۴}\right]$$

۲۰۱,

$$x = -۱ \longrightarrow \frac{-۲-۱}{-۱+۳} \Rightarrow \frac{-۳}{۲}$$

$$x = +۱ \longrightarrow \frac{۲-۱}{۱+۳} = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{-۳}{۲}, \frac{۱}{۴}\right]$$

۴ همواره برقرار

$$f(x) = \frac{x^۲ - x + \frac{1}{۴}}{x^۲ - x + 1} \Rightarrow x^۲ - x + 1 \neq ۰$$

$D_f = \mathbb{R}$

برد تابع

$$yx^۲ - yx + y = x^۲ - x + \frac{1}{۴} \Rightarrow (1-y)x^۲ + (y-1)x + \frac{1}{۴} - y$$

$$x = \frac{-y+1 \pm \sqrt{(y-1)^۲ - ۴\left(\frac{1}{۴} - y\right)(1-y)}}{۲-۲y} \Rightarrow y^۲ + 1 - ۲y - 1 + ۵y - ۴y^۲ \geq ۰$$

$$-۳y^۲ + ۳y \geq ۰$$

$$-y^۲ + y \geq ۰$$

MRNOTE

$$۲ - ۲y \neq ۰ \Rightarrow ۲ \neq ۲y$$

$$y \neq 1$$

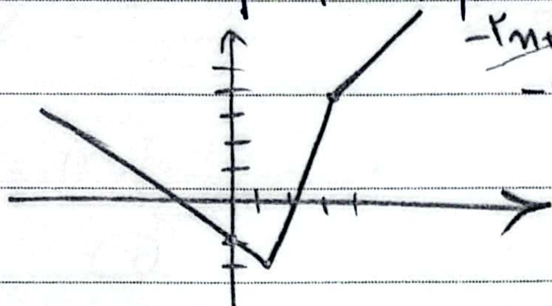
۰	۱
−	+	−

$[۰, ۱]$

۷)

الف) $y = |2x-2| - |x-3|$

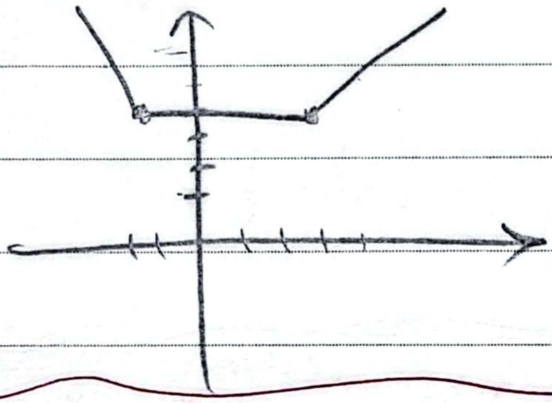
$$\begin{array}{c|c|c} & 1 & 3 \\ \cancel{-2x+2+x-3} & 2x-2+x-3 & 2x-2-x+3 \\ -x-1 \quad -2 & 3x-5 \quad 4 & x+1 \end{array}$$



$[-2,+\infty)$

ب) $y = |x-3| + |x+1|$

$$\begin{array}{c|c|c} & -1 & 3 \\ -x+3-x-1 & -x+3+x+1 & x-3+x+1 \\ -2x+2 \quad 4 & 4 & 4 \quad 2x-2 \end{array}$$

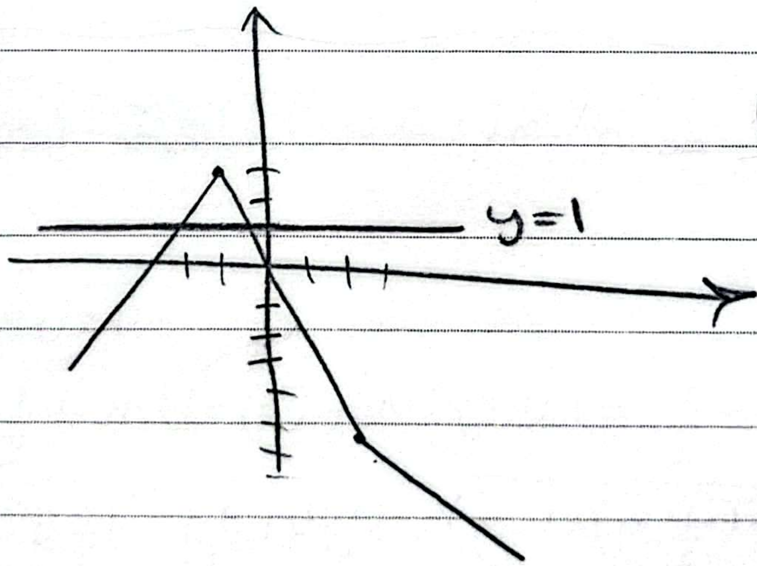


$[4,+\infty)$

۸)

$|x-2| - |2x+2| \leq 1$

$$\begin{array}{c|c|c} & -1 & 2 \\ \cancel{-x+2+2x+2} & \cancel{-x+2-2x-2} & \cancel{x-2-2x-2} \\ x+4 \quad 3 & -3x \quad -6 & -x-4 \end{array}$$



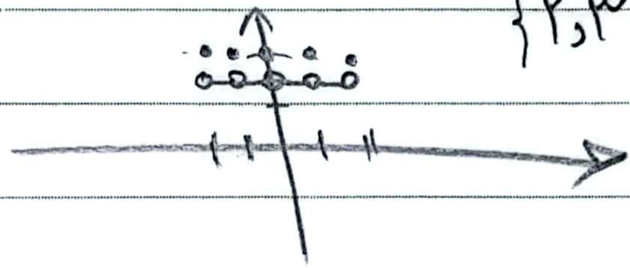
$(-\infty,-3] \cup [-\frac{1}{3},+\infty)$

۹)

الف) $y = [x] + [۳ - x]$ $\qquad [-۲, ۲]$

$y = \underbrace{[x] + [-x]}_{} + ۳$

$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} & ۳ \\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} & ۲ \end{cases}$ $\qquad \{۲, ۳\}$

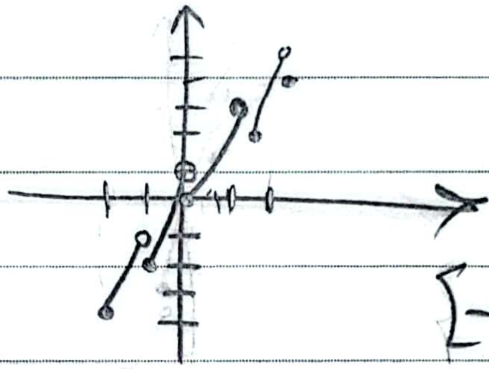


ب) $y = ۳x - [x]$

$-۲ \leq x < -۱ \Rightarrow [-۲] = [x]$

$\cancel{۳ \times -۲} + ۲ = -۴$
-۶

$\cancel{۳ \times -۱} + ۲ = -۱$
-۳



$[-۴, ۵)$

$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow [-۱] = [x]$

$-۱ \times ۳ + ۱ = -۲$

$۳ \times ۰ + ۱ = ۱$

$۲ \times ۳ - ۲ = ۴$

$[۰] = [x]$

$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow ۰ \times ۳ - ۰ = ۰$

$۱ \times ۳ - ۰ = ۳$

$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow ۱ \times ۳ - ۱ = +۲$

$[۱] = [x] = ۱ \qquad ۲ \times ۳ - ۱ = ۵$

۱۰)

الف) $y = \sin^2 x - \sin x + ۱$

$\xrightarrow{\sin x = ۱} ۱ - ۱ + ۱ = ۱$

$\xrightarrow{\sin x = -۱} ۱ + ۱ + ۱ = ۳$

$\xrightarrow{\frac{-b}{۲a} = \frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۳}{۴}$

$[\frac{۳}{۴}, ۳]$

ب) $\sin^4 x + \sin^2 x + ۱$

$\xrightarrow{\sin^2 x = ۱} ۱ + ۱ + ۱ = ۳$

$\xrightarrow{\sin^2 x = ۰} ۱ + ۰ + ۰ = ۱$ $\qquad [۱, ۳]$

$\frac{-b}{۲a} = \frac{-۱}{۲}$ ✗

✗