مرسا نجاتی / تکلیف شماره‌ی ۳ ۱۹٫۵ آفرین!

① $y=\frac{x^2+x+2}{x-1} \Rightarrow yx-y=x^2+x+2 \to x^2+(1-y)x+2+y=0$

②

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \xrightarrow{\Delta\geq 0} b^2-4ac\geq 0 \to (1-y)^2-4(2+y)\geq 0 \to$

$1+y^2-2y-8-4y\geq 0 \to y^2-6y-7\geq 0 \xrightarrow{a+c=b} y=-1 , y=7$

	-1		7	
$+$	0	$-$	0	$+$

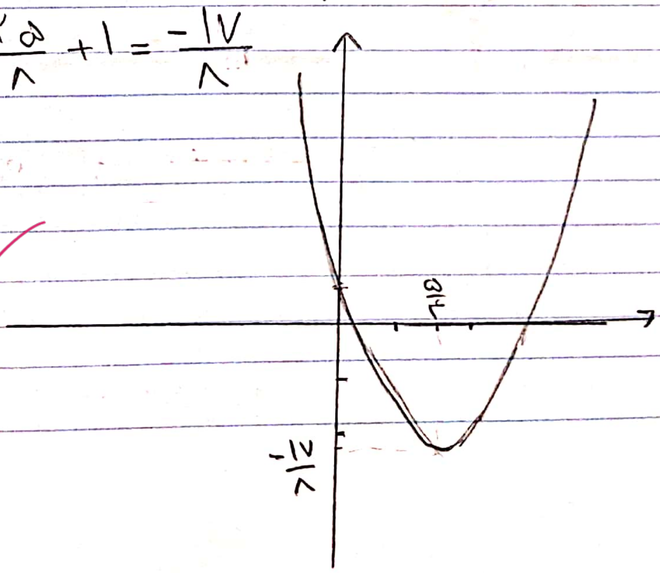
$R_f=(-\infty,-1]\cup[7,+\infty)$

② ②

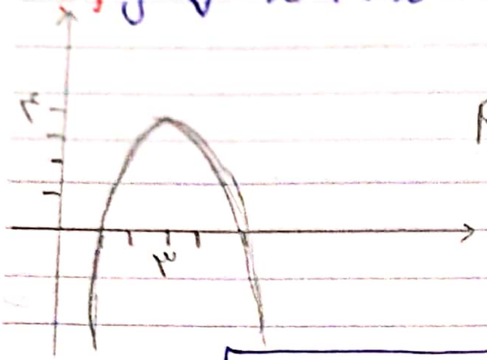
الف) $y=2x^2-5x+1$ $\quad x=\frac{-b}{2a}=\frac{5}{4}$

$y=2\times\frac{25}{16}-5\times\frac{5}{4}+1=\frac{-25}{8}+1=\frac{-17}{8}$

$R_f=[-\frac{17}{8},+\infty)$



ب) $y=\sqrt{-x^2+6x-5} \to x=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{-2}=3 \quad y=-9+18-5=4$



$R_f=(\sqrt{-\infty},\sqrt{4}]\to[0,2]$

ج) $y=\sqrt{x^3-3x^2+3x+1} \to$ بزرگترین توان این عبارت فرد است پس $R_f=\mathbb{R}$

$R_f=\sqrt{\mathbb{R}}=[0,+\infty)$

د) $\log\underbrace{(x^3-6x^2+7x+4)}_{\text{برد } R \text{ دارد}}$ از R، $\log$ می‌گیریم $R_f=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

---

۳) (۲)

الف) $y=\frac{3x+1}{2x-6} \Rightarrow x=-\frac{-6y-1}{2y-3}=\frac{6y+1}{2y-3}$

$2y-3\neq0\to y\neq\frac{3}{2} \qquad R_f=\mathbb{R}-\{\frac{3}{2}\}$

ب) $y=\sqrt{\frac{4x+1}{x-2}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} y^2=\frac{4x+1}{x-2}\to x=-\frac{-2y^2-1}{y^2-4}=\frac{2y^2+1}{y^2-4}$

$y^2-4\neq0\to y^2\neq4\to y\neq2,-2 \quad , y\geq0$

$R_f=[0,+\infty)-\{2\}$

ج) $y=\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{x^2+3+1}{\sqrt{x^2+3}}=\sqrt{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$

کمترین مقدار ← $x=0$ ← $\sqrt{3}$

$y=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\to R_f=[\frac{4\sqrt{3}}{3},+\infty)$

د) $y = x^2 + \frac{1}{x^2+4} + 4 - 4 = x^2 + 4 + \frac{1}{\underbrace{x^2+4}} - 4 \xrightarrow{x=0} y = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} \leftarrow x = 0$ مقدار کمترین ←

$R_f = [\frac{1}{4}, +\infty)$

---

۲ ۴

$y = \frac{3x^2+4}{x^2-1}$

روش اصلی: $x^2 = -\frac{-y-4}{y-3} \to x = \pm\sqrt{\frac{y+4}{y-3}} \to \frac{y+4}{y-3} \geq 0 \to$

	-4		3	
$+$	ϕ	$-$	$\nexists$	$+$

$R_f = (-\infty, -4] \cup (3, +\infty)$

ترفند ۲: $y = \frac{3x^2+4}{x^2-1}$ $\xrightarrow{min} x^2 = 0 \to y = -4$

$\xrightarrow{max} x^2 = +\infty \to y = \frac{3(\infty)+4}{(\infty)-1} \xrightarrow[\text{هستند}]{\text{۱ و ۴ - ناچیز}} \frac{3(\cancel{\infty})}{\cancel{\infty}} = 3$

مخرج با $x = 1, x = -1$ صفر می‌شود $\to R_f = (-\infty, -4] \cup (3, +\infty)$

---

۲ ۵

$y = \frac{2\sin x - 1}{\sin x + 2}$

روش اصلی: $\sin x = -\frac{2y+1}{y-2} \to \sin x = \frac{2y+1}{2-y} \to -1 \leq \frac{2y+1}{2-y} \leq 1$

I) $\frac{2y+1}{2-y} \geq -1 \to \frac{y+3}{2-y} \geq 0 \to$

	-3		2	
$-$	ϕ	$+$	$\nexists$	$-$

II) $\frac{2y+1}{2-y} \leq 1 \to \frac{3y-1}{2-y} \leq 0 \to$

	$\frac{1}{3}$		2	
$-$	ϕ	$+$	$\nexists$	$-$

$\cap \to R_f = [-3, \frac{1}{3}]$

تمرین ۲: $y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x+3}$

$\xrightarrow{\min} \sin x=-1 \rightarrow y=-\dfrac{3}{2}$

$\xrightarrow{\max} \sin x=1 \rightarrow y=\dfrac{1}{4}$

$\sin x+3 \rightarrow$ ریشه ندارد $\rightarrow$ درون ۲ عدد $\rightarrow R_f=\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{4}\right]$

---

۶ ۲

$f(x)=\dfrac{x^2-x+\frac{1}{4}}{x^2-x+1} \rightarrow x^2-x+1\neq 0 \rightarrow \Delta<0 \rightarrow$ ریشه ندارد $\rightarrow D_f=\mathbb{R}$

$y=\dfrac{(x-\frac{1}{2})^2}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \rightarrow \underbrace{(x-\tfrac{1}{2})^2}_{\geq 0 \text{ است}}=-\dfrac{\frac{3}{4}y}{y-1}=\dfrac{\frac{3}{4}y}{1-y}\geq 0 \rightarrow$

	0		1	
$-$		$+$		$-$

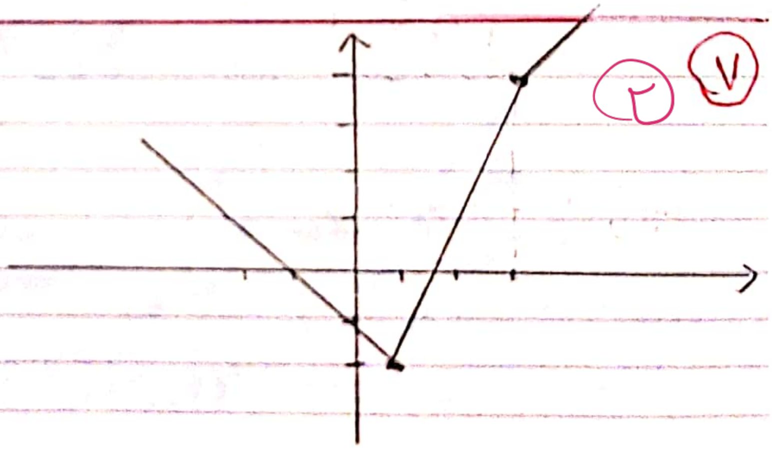
$R_f=[0,1)$

---

۷ ۲

الف) $y=|2x-2|-|x-3|$

	1		3	
$-x-1$		$3x-5$		$x+1$
	(-2)		(2)	

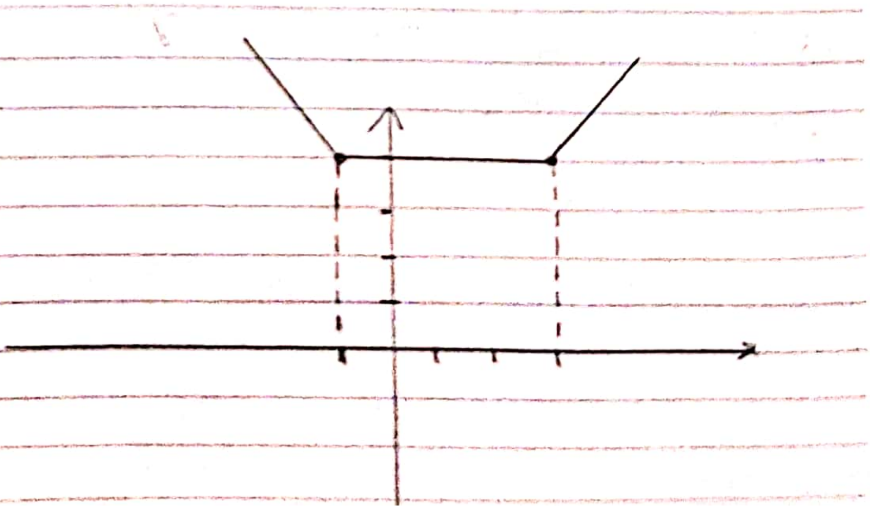


$R_f=[-2,+\infty)$

ب) $y=|x-3|+|x+1|$ $\rightarrow$ تابع گلدونی

کف گلدون $\rightarrow 3-(-1)=4$

لبه‌ها با شیب ۲



$R_f=[4,+\infty)$

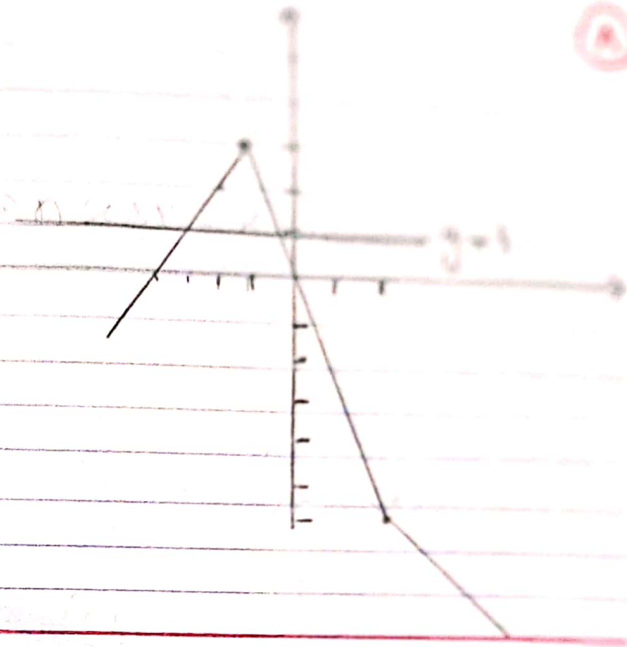
$|x-۲| - |۲x+۲| \leq ۱$

$-۱ \quad ۲$

$x+۴ \leq ۱ \quad | \quad -۳x \leq ۱ \quad | \quad -x-۴$

$x = -۳ \quad | \quad x = -\frac{۱}{۳}$

$D_f = \mathbb{R} - (-۳, -\frac{۱}{۳})$

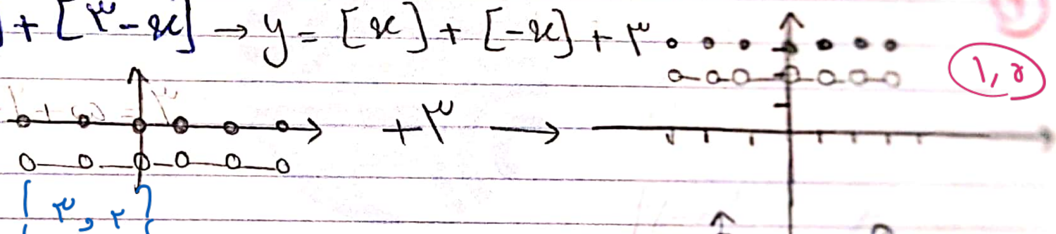


الف) $y = [x] + [۳-x] \to y = [x] + [-x] + ۳$

$[x] + [-x] \to \quad +۳ \to$

$(۱, ۵)$

$R_y = \{۳, ۲\}$



ب) $y = ۲x - [x]$

$-۲ \leq x < -۱ \to [x] = -۲ \to ۲x + ۲$

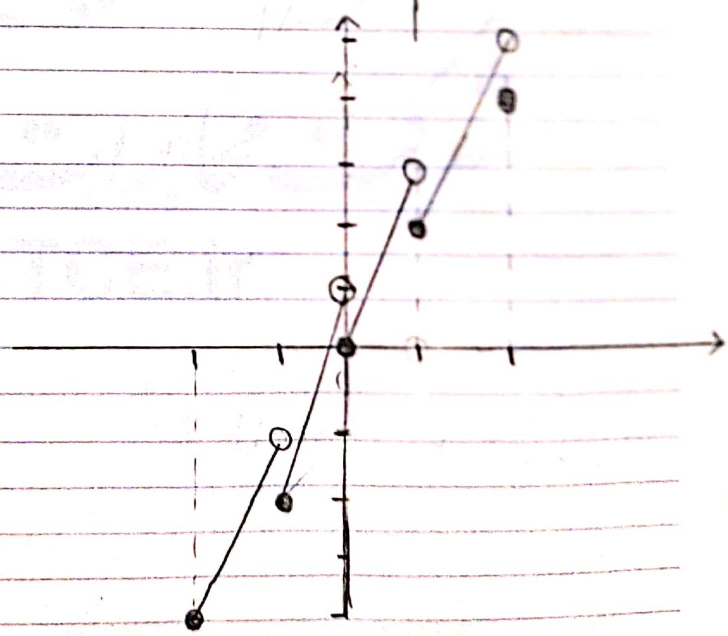
$-۱ \leq x < ۰ \to [x] = -۱ \to ۲x + ۱$

$۰ \leq x < ۱ \to [x] = ۰ \to ۲x$

$۱ \leq x < ۲ \to [x] = \to ۲x - ۱$

$x = ۲ \to y = ۴$

$R_y = [-۲, ۵)$



۲ ۱۰

الف) $y = \sin^۲ x - \sin x + ۱$

$\min = \sin x = -۱ \rightarrow y = ۳$ $\quad \overset{\max}{\sin x} = ۱ \rightarrow y = ۱$

$\sin x = \frac{-b}{۲a} = \frac{۱}{۲}$ $\quad y = \frac{۱}{۴} - \frac{۲}{۴} + \frac{۴}{۴} = \frac{۳}{۴}$

$\Rightarrow R_f = [\frac{۳}{۴}, ۳]$

ب) $y = \sin^۴ x + \sin^۲ x + ۱$

$\min = \sin^۲ x = ۰ \rightarrow y = ۱$ $\quad \max = \sin^۲ x = ۱ \rightarrow y = ۳$

$\Rightarrow R_f = [۱, ۳]$

$\sin^۲ x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۱}{۲} \rightarrow \times$