حل تشریحی دوازدهم

(1)

$$f(x+2)=\begin{cases} 2(x+2)-1 & x\geq 1 \rightarrow x+2\geq 3 \\ 4(x+2)-9 & x<1 \rightarrow x+2<3 \end{cases}$$

$$f(3-x)\begin{cases} 2(3-x)-1 & 3-x\geq 3 \rightarrow 0\geq x \\ 4(3-x)-9 & 3-x<3 \rightarrow 0<x \end{cases}$$

$$f(x+1)\begin{cases} 2(x+1)-1 & x+1\geq 3 \rightarrow x\geq 2 \\ 4(x+1)-9 & x+1<3 \rightarrow x<2 \end{cases}$$

$x\geq 2 \rightarrow y=\sqrt{12-4x-9-2x+1}=\sqrt{-7x+1}$ I

$2>x>0 \rightarrow y=\sqrt{12-4x-9-4x-4+9}=\sqrt{-8x+8}$ II

$0\geq x \rightarrow y=\sqrt{9-4x-1-4x-4+9}=\sqrt{-7x+13}$ III

I: $\emptyset$; II: $(0,1]$; III: $x\leq 0$; $\cup$ $(-\infty,1]$

2

(2) تابع $f(x)$ اکیداً صعودی است

$f(x)<x^3 \rightarrow f^{-1}\circ f(x)<f^{-1}f(x^3)$

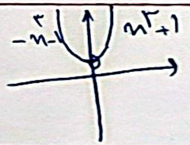
$(x^3+x)^3<x^3 \rightarrow x^3+x<x \rightarrow x^3<0 \rightarrow x<0$

2

(3)

$x>0 \rightarrow x^3+1$

$x<0 \rightarrow -x^3-1$



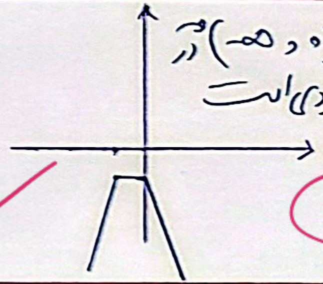
$x\neq 0$ غیر اکیداً: $x>0$ صعودی، $x<0$ نزولی

2

(4)

-1		0	
$\frac{2x+1}{-x+x+1}=(2x+1)$	$\frac{2x+1}{-x-x-1}=\frac{2x+1}{-2x-1}=-1$	$\frac{2x+1}{x-x-1}=\frac{2x+1}{-1}=-2x-1$	

$(-\infty,0]-\{-\frac{1}{2}\}$ در صعودی است



$a=0$

2

(5)

$-\log_{\frac{1}{2}}^{x^2-2x-8} \rightarrow \log_2^{x^2-2x-8}$ ، $0\geq x^2-2x-8\leq 1$

$0<x^2-2x-8 \rightarrow$ $0<(x-4)(x+2)$

$(-\infty,-2)\cup(4,+\infty)$ I

$x^2-2x-9\leq 0 \rightarrow$ $x=\frac{2\pm\sqrt{4+36}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{10}}{2}=1\pm\sqrt{10}$

II: $[1-\sqrt{10},1+\sqrt{10}]$

$I\cap II$: $[1-\sqrt{10},-2)\cup(4,1+\sqrt{10}]$

در این بازه اکیداً صعودی است

0.5

(6) الف)

$1<a^2-3$ ، $0<a^2-4$ ، $\frac{-2 \quad 2}{+ \quad - \quad +}$ ، $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

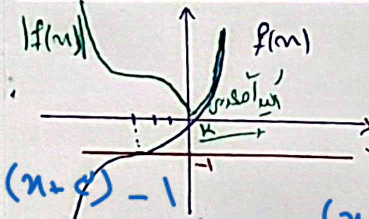
2

ب)

$1\leq a^2-3$ ، $0\leq a^2-4$ ، $\frac{-2 \quad 2}{+ \quad - \quad +}$ ، $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

$a^2-3=0 \rightarrow a=\pm\sqrt{3}$ ، $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)\cup\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$

(7)



$(x-3)^3-1=f(x)$

$(x-3)^3-1=0 \rightarrow (x-3)^3=1 \rightarrow x-3=1$

$x=4$ ، $k=4$

$(x+2)^3-1<0 \rightarrow x+3<1 \rightarrow x<-2$

در نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}-3\\-1\end{matrix}\right.$ مماس است

1.25

(8)

$f^{-1}\circ f(x)\leq f^{-1}f(\sqrt{x}) \rightarrow f(x)\leq\sqrt{x} \rightarrow x+\sqrt{x}-2\leq\sqrt{x}$

$D_{f\circ f}=f(x)\in D_f \rightarrow x+\sqrt{x}-2\geq 0$

$x\geq 0$ I ، $x-2\leq 0 \rightarrow$ I∩ $x\leq 2 \rightarrow 0\leq x\leq 2$

$\sqrt{x}$ وجود داشته باشد

$(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)\geq 0 \rightarrow \sqrt{x}\geq 1 \rightarrow x\geq 1$

$\rightarrow 1\leq x\leq 2$

1.25

(9)

$\cos x=1 \xrightarrow{max} 2^{\sqrt[3]{8}}-2^{\sqrt[3]{-8}} \rightarrow 2^2-2^{-2}=4-\frac{1}{4}=3.75$

$\cos x=-1$

$\cos x=0 \xrightarrow{min} 2^{\sqrt[3]{0-1}}-2^{\sqrt[3]{1-0}} \rightarrow 2^{-1}-2=\frac{1}{2}-2=-1.5$ ، $R_f=[-1.5,3.75]$

$a=-1.5$ ، $b=3.75$

$b-a \rightarrow 3.75+1.5 \rightarrow 5.25$

2

(10)

$f(x)=x-[x]-2$

$$g\circ f=\frac{2^{x-[x]-2}-2^{-x+[x]+2}}{2}=\frac{\frac{2^{x-[x]}}{4}-2^{-x+[x]}\times 4}{2}=\frac{\frac{2^{x-[x]}}{4}-\frac{1}{2^{x-[x]}}\times 4}{2}$$

$0\leq t<1$

$$\frac{-\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}}{2}=\frac{-3\times\frac{1}{4}}{2} \quad \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times 4}{2} \quad \frac{\frac{2}{4}-\frac{1}{2}\times 4}{2}$$

$R_{g\circ f}$ $\left[-\frac{3}{4},-\frac{3}{4}\right)$

1

سوال ۵

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ ⎫ f نزولی ⎫ g نزولی

$g(x) = x^2 - 2x - 8$ ⎭ $\log$ صعودی ⎭

$x^2 - 2x - 8 \longrightarrow$  $\longrightarrow$ $x \leq 1$ نزولی است

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 2x - 8 \longrightarrow x^2 - 2x - 8 > 0 \longrightarrow x > 4$ یا $x < -2$

$\xrightarrow{\text{اشتراک}} x < -2$

سوال ۱۰

$0 \leq x - [x] < 1 \longrightarrow -2 \leq x - [x] - 2 < -1$

$R_f = [-2, -1)$

$$\begin{cases} \dfrac{2^{-2} - 2^{2}}{2} = -\dfrac{15}{8} \\[2ex] \dfrac{2^{-1} - 2^{1}}{2} = -\dfrac{3}{4} \end{cases} \longrightarrow R_{gof} = \left[-\dfrac{15}{8}, -\dfrac{3}{4}\right)$$