مبینا جعفری پور — تکلیف ۱ — دوازدهم دختر ۳

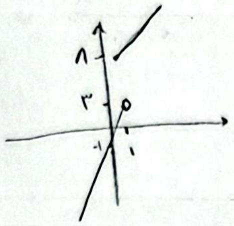
۱

$f(x+2) = \begin{cases} 3x+5 & x \geq 1 \\ 4x-1 & <1 \end{cases}$

$4(3-x) \geq f(x+1) \implies 3-x \geq x+1 \implies 2 \geq 2x \implies 1 \geq x$

$\implies \underline{D: (-\infty, 1]}$

از آنجایی که دامنه تابع R است نیازی به بررسی دامنه نیست



چون فقط انتقال افقی داشته

$\rightarrow f(x+2) \rightarrow f(x)$

صعودی اکید — صعودی اکید

۲

$f(x) = (x^3+x)^3$ چون هر دو تابع صعودی اکید اند صعودی اکید است

$f \circ f(x) < f(x^3) \implies f(x) < x^3 \implies (x^3+x)^3 < x^3 \implies 0 < x^3-(x^3+x)^3 \implies 0 < (x-(x^3+x))\underbrace{\left((x^3)^2+(x^3+x)^2+x(x^3+x)\right)}$ ⋆

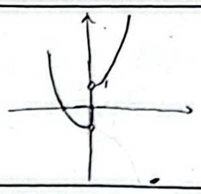
با استفاده از این نامساوی همیشه مثبت است

$\implies 0 < x-(x^3+x) \implies x^3 < 0 \implies \underline{x<0}$

⋆ $a^2+b^2+ab>0 \iff 2a^2+2b^2+2ab>0 \iff \underbrace{(a+b)^2+a^2+b^2>0}_{\text{همیشه برقرار}}$

۳

$y = |x|\left(x^2+\frac{1}{x}\right) \begin{cases} x>0 \implies x\left(x^2+\frac{1}{x}\right) = x^3+1 \\ x<0 \implies -x\left(x^2+\frac{1}{x}\right) = -x^3-1 \end{cases}$



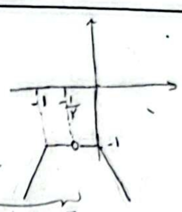
$\rightarrow$ نایکنوا

۴

$f(x) = \frac{2x+1}{|x|-|x+1|} = \frac{2x+1}{|x|-|x+1|} \times \frac{|x|+|x+1|}{|x|+|x+1|} = \frac{(2x+1)(|x|+|x+1|)}{\underbrace{x^2-(x+1)^2}_{-2x-1}} = -|x|-|x+1|$

قرینه تابع داونی

$|x|-|x+1| \neq 0 \implies |x| \neq |x+1| \begin{cases} x \neq x+1 \ \times \\ -x \neq x+1 \implies x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \implies D_f: \mathbb{R}-\{-\frac{1}{2}\}$



$(-\infty, a]$

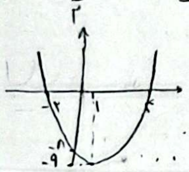
$\implies \boxed{a = -\frac{1}{2}}$

۵

$y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-8) \implies \begin{cases} f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x & \text{نزولی اکید} \\ g(x) = x^2-2x-8 & \text{نایکنوا} \end{cases} \implies y = f(g(x)) \longrightarrow$

برای صعودی اکید بودن باید $g(x)$ نزولی اکید باشد پس بازه‌ای از دامنه را می‌خواهیم که اینگونه باشند.

$\implies x = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$ رأس



$\implies \underline{(-\infty, 1]}$

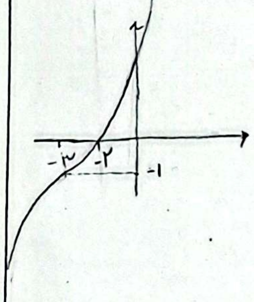
۶

الف) $1 < a^2-3 \implies 4 < a^2 \implies 2 < a \cup a < -2$ تابع نزولی صعودی اکید.

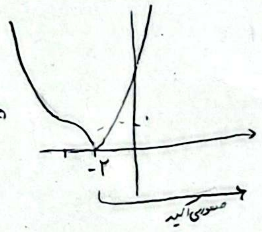
ب) $\begin{cases} a^2-3=0 \implies a^2=3 \implies a=\pm\sqrt{3} & \text{تابع ثابت } 0 \\ a^2-3=1 \implies a^2=4 \implies a=\pm 2 & \text{تابع ثابت } 1 \end{cases}$

۷

$(-3,-1) \rightarrow f(x) = m(x+3)^3-1 \overset{m=1}{=} (x+3)^3-1$



$\implies$



صعودی اکید

$\implies \underline{k=-2}$

$f(x)=x+\sqrt{x}-۲$ → جمع دو تابع صعودی اکیداً صعودی اکیداً است. $D_f:[۰,+\infty)$ ۸

$f\circ f(x)\leqslant f(\sqrt{x}) \Rightarrow f(x)\leqslant \sqrt{x} \Rightarrow x+\sqrt{x}-۲\leqslant\sqrt{x} \Rightarrow \underline{x\leqslant ۲}$

$\sqrt{x}\geqslant ۰ \Rightarrow \underline{x\geqslant ۰}$ / $f(x)\geqslant ۰ \Rightarrow x+\sqrt{x}-۲\geqslant ۰ \Rightarrow (\sqrt{x}+\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۹}{۴}\geqslant ۰ \Rightarrow (\sqrt{x}+\frac{۱}{۲})^۲\geqslant\frac{۹}{۴}$ $\begin{cases}\sqrt{x}+\frac{۱}{۲}\geqslant\frac{۳}{۲} \Rightarrow \sqrt{x}\geqslant ۱ \Rightarrow \underline{x\geqslant ۱} \\ \sqrt{x}+\frac{۱}{۲}\leqslant-\frac{۳}{۲} \Rightarrow \sqrt{x}\leqslant -۲ \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$

$\Rightarrow [۱,۲] \rightarrow$ ۲ عدد صحیح

$-۱\leqslant \cos x\leqslant ۱ \Rightarrow ۰\leqslant \cos^۲ x\leqslant ۱ \Rightarrow ۰\leqslant ۹\cos^۲ x\leqslant ۹ \Rightarrow -۱\leqslant ۹\cos^۲x-۱\leqslant ۸ \Rightarrow -۱\leqslant\sqrt[۳]{۹\cos^۲x-۱}\leqslant ۲$ ۹

$f(x)=\frac{۲^{\sqrt[۳]{۹\cos^۲x-۱}}-۲^{\sqrt[۳]{۱-۹\cos^۲x}}}{۲} \xrightarrow{۲^{\sqrt[۳]{۹\cos^۲x-۱}}=a} t-\frac{۱}{t}=\frac{t^۲-۱}{t}$ $\begin{matrix}\min t=۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}\\ \max t=۲^۲=۴\end{matrix}$ $\xrightarrow{\text{دو سر بازه را می دهیم}}$ $[-\frac{۳}{۲},\frac{۱۵}{۴}]$ خروجی می شود $\Rightarrow \boxed{b-a=\frac{۲۱}{۴}}$

$g\circ f(x)=\frac{۲^{x-[x+۲]}-۲^{-x+[x+۲]}}{۲} \xrightarrow{۲^{x-[x+۲]}=a} \frac{a-\frac{۱}{a}}{۲}=\frac{a^۲-۱}{۲a}$ $\Rightarrow$ دو سر بازه را می دهیم $[\frac{۱۵}{۸},-\frac{۳}{۴}]$ ۱۰

$f(x)=x-[x+۲]=x-[x]-۲ \Longrightarrow ۰\leqslant x-[x]<۱ \Rightarrow -۲\leqslant x-[x]-۲<-۱ \Rightarrow \frac{۱}{۴}\leqslant ۲^{x-[x]-۲}<\frac{۱}{۲}$: خروجی می شود