۱۶,۷۵

مرسا نجاتی / تکلیف شماره‌ی ۹

①

$$f(x+2)=\begin{cases}3x+5 & ; x\geq 1\\ 4x-1 & ; x<1\end{cases} \to x+2=t \to x=t-2$$

$$y=\sqrt{f(3-x)-f(x+1)}$$

$$f(t)=\begin{cases}3(t-2)+5 & ; t-2\geq 1\\ 4(t-2)-1 & ; t-2<1\end{cases} \to f(x)=\begin{cases}3x-1 & ; x\geq 3\\ 4x-9 & ; x<3\end{cases}$$

$$f(3-x)\begin{cases}8-3x & ; x\geq 3\\ 13-4x & ; x<3\end{cases} \qquad f(x+1)\begin{cases}3x+2 & ; x\geq 3\\ 4x-5 & x<3\end{cases}$$

$$x\geq 3 \to \sqrt{8-3x-3x-2}=\sqrt{6-6x} \to 6-6x\geq 0 \to \begin{array}{c|c} & 1\\ + & -\end{array}$$

$$x<3 \to \sqrt{13-4x-4x+5}=\sqrt{8-8x} \to 8-8x\geq 0 \to \begin{array}{c|c} & 1\\ + & -\end{array}$$

$\cap \to (-\infty,1]$

۲

②

$$f(x)=(x^3+x)^3 \qquad f\circ f(x)<f(x^3)$$

صعودی اکید

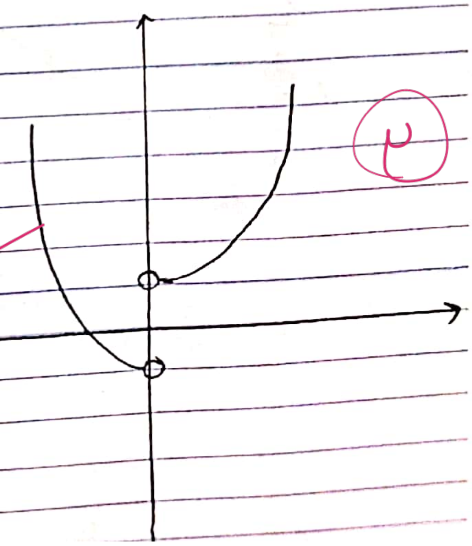
$$\cancel{f}(f(x))<\cancel{f}(x^3) \to (x^3+x)^3<x^3 \to x^3+x<x \to x^3<0 \to x<0$$

۲

③

$$y=|x|\left(x^2+\frac{1}{x}\right) \to D_f=\mathbb{R}-\{0\}$$

$$\begin{cases}x>0 \to x\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=x^3+1\\ x<0 \to -x\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=-x^3-1\end{cases}$$



ناپیوسته ⇐

۲

Scanned by CamScanner

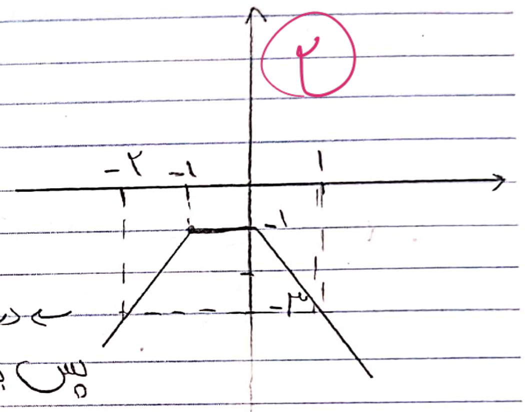
۴) $f(x)=\dfrac{2x+1}{|x|-|x+1|}$ $(-\infty,a] \to$ صعودی

$-1$ $\quad$ $0$

$\dfrac{2x+1}{-x+x+1} = 2x+1$ $\quad$ $\dfrac{2x+1}{-x-x-1}$ $\quad$ $\dfrac{2x+1}{-2x-1}=-1$ $\quad$ $\dfrac{2x+1}{x-x-1} = -2x-1$

$-1$ $\quad$ $-1$

۲




← در بازه‌ی $(-\infty,0]$ صعودی است اما صعودی اکید نیست

پس بیشترین مقدار a صفر است ← $a=0$

۵) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-8)$ ← نزولی $\longrightarrow \log_{2}\dfrac{1}{x^2-2x-8} \to$ صعودی

۱

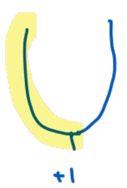
$0<x^2-2x-8<1 \to x^2-2x-8>0 \to (x+2)(x-4)>0$ $\quad$ $-2$, $4$ $\quad$ $+ \; - \; +$

$\to x^2-2x-9<0 \to x=\dfrac{2\pm2\sqrt{10}}{2}=1\pm\sqrt{10} \to$ $\quad$ $1-\sqrt{10}$, $1+\sqrt{10}$ $\quad$ $+ \; - \; +$

$\cap \to (1-\sqrt{10},-2)\cup(4,1+\sqrt{10})$.

$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$ و $g(x)=x^2-2x-8$ چون f نزولی است g هم باید نزولی باشد تا fog صعودی باشد.

$x^2-2x-8 \longrightarrow (-\infty,1]$ نزولی است



۶) $f(x) = (a^2-4)^x$

الف) تابع $f$ صعودی اکید باشد

$a^2-4>1 \to a^2>5 \to a>2$ و $a<-2 \to (-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

۲

ب) تابع $f$ صعودی باشد

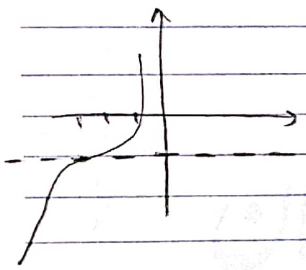
$a^2-4\geq 1 \to a^2\geq 5 \to a\geq 2$ و $a\leq -2$

$a^2-4=0 \to a=\pm\sqrt{4}$

$\to (-\infty,-2]\cup[2,+\infty)\cup\{\pm\sqrt{4}\}$

۷) در نقطهٔ $(-3,-1)$ بر خط موازات محورها مماس است

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$



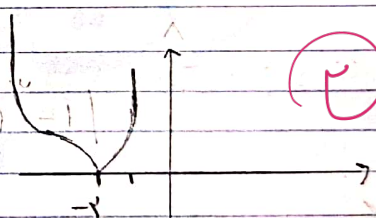
$\to f(x)=(x+3)^3-1 = x^3+9x^2+27x+27-1 =$

$x^3+9x^2+27x+26 = x^3+ax^2+bx+c$

$a=9 \quad b=27 \quad c=26$

۲

$y=|f(x)| \to (k,+\infty) \to$ اکیداً صعود $\to$



$|(x+3)^3-1|=0 \to (x+3)^3-1=0 \to$

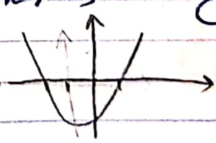
$(x+3)^3=1 \to x+3=1 \to x=-2=k \to (-2,+\infty)$

۸) چند عدد صحیح

$f(x)=x+\sqrt{x}-2 \qquad f\circ f(x)\leq f(\sqrt{x}) \to$

پس $x+\sqrt{x}-2$ اکیداً صعودی است

$D_f=[0,+\infty) \to \sqrt{x}=t \to t^2+t-2 \to$



۱/۲۵

$f(f(x))\leq f(\sqrt{x}) \to f(x)\leq\sqrt{x} \to$

$x+\sqrt{x}-2\leq\sqrt{x} \to x-2\leq 0 \to x\leq 2$ , $x\geq 0 \xrightarrow{\cap} 0\leq x\leq 2$

$\to \{0,1,2\} \to$ ۳ عدد صحیح

$D_{f\circ f} \to f(x)\in D_f \to x+\sqrt{x}-2\geq 0$

$(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)\geq 0 \qquad \sqrt{x}\geq 1 \to x\geq 1$



$1\leq x\leq 2$

$f(x) = 3^{\sqrt[4]{9\cos^2 x - 1}} - 2^{\sqrt{1 - 9\cos^2 x}}$ ⟵ برد: $[a, b]$ $b-a$? (۹)

$\max \to \cos^2 x = 1 \to 2^2 - 2^{-2} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$

$\min \to \cos^2 x = 0 \to 2^{-1} - 2^1 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$ (۳)

$[a, b] \to [-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}] \to b - a = \frac{15}{4} + \frac{6}{4} = \frac{21}{4}$

---

$f(x) = x - [x+2]$ $g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$ $g\circ f(x)$ برد (۱۰)

.۱۵

حل $f(x) = x - [x] - 2$

$0 \leq x - [x] < 1 \to -2 \leq x - [x] - 2 < -1$ $R_f: [-2, -1)$

$g\circ f(x) = \frac{2^{x-[x]-2} - 2^{-(x-[x]-2)}}{2}$

$\begin{cases} \frac{2^{-2} - 2^2}{2} = -\frac{15}{8} \\ \frac{2^{-1} - 2^1}{2} = -\frac{3}{4} \end{cases}$ $R_{g\circ f}: [-\frac{15}{8}, -\frac{3}{4})$

$\to 2^{x-[x]-3} - 2^{-x+[x]+1}$

$\underbrace{x - [x]}_{[0, 1)} - 3 \to [-3, -2)$ $\underbrace{-x + [x]}_{(-1, 0]} + 1 \to (0, 1]$