مرسا نجاتی / تکلیف شماره‌ی ۹

(۱)

$$f(x+2)=\begin{cases}3x+5 & ; x\geq 1\\ 4x-1 & ; x<1\end{cases} \to x+2=t \to x=t-2$$

$$y=\sqrt{f(3-x)-f(x+1)}$$

$$f(t)=\begin{cases}3(t-2)+5 & ; t-2\geq 1\\ 4(t-2)-1 & ; t-2<1\end{cases} \to f(x)=\begin{cases}3x-1 & ; x\geq 3\\ 4x-9 & ; x<3\end{cases}$$

$$f(3-x)\begin{cases}8-3x & ; x\geq 3\\ 13-4x & ; x<3\end{cases} \qquad f(x+1)\begin{cases}3x+2 & ; x\geq 3\\ 4x-5 & x<3\end{cases}$$

$$x\geq 3 \longrightarrow \sqrt{8-3x-3x-2}=\sqrt{6-6x} \to 6-6x\geq 0 \to \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline + & - \end{array}$$

$$x<3 \longrightarrow \sqrt{13-4x-4x+5}=\sqrt{8-8x} \to 8-8x\geq 0 \to \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline + & - \end{array}$$

$$\cap \to (-\infty,1]$$

(۲)

$$f(x)=(x^3+x)^3 \qquad f\circ f(x)<f(x^3)$$

صعودی اکید

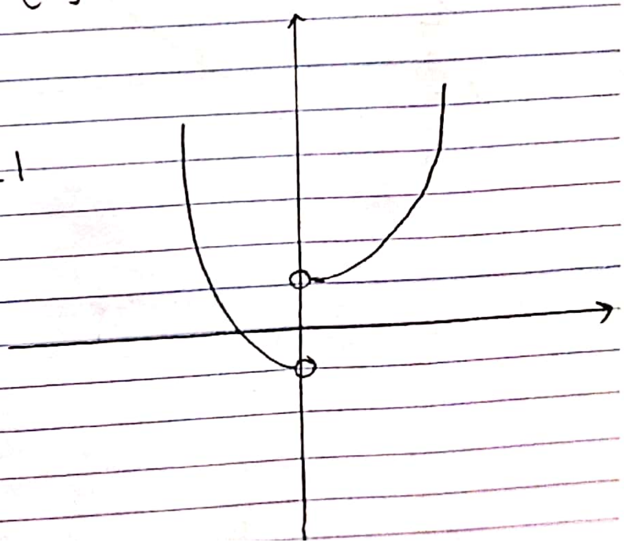
$$\cancel{f}(f(x))<\cancel{f}(x^3) \to (x^3+x)^3<x^3 \to x^3+x<x \to x^3<0 \to x<0$$

(۳)

$$y=|x|\left(x^2+\frac{1}{x}\right) \to D_f=\mathbb{R}-\{0\}$$

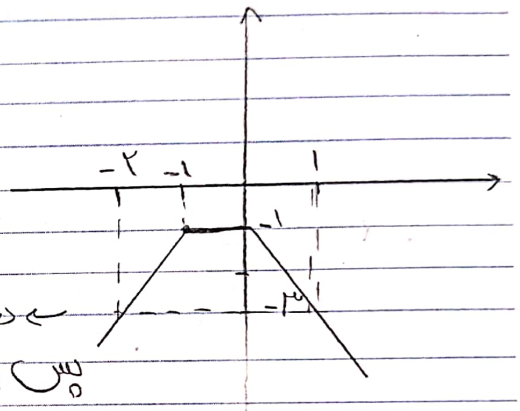
$$\begin{cases}x>0 \longrightarrow x\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=x^3+1\\ x<0 \longrightarrow -x\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=-x^3-1\end{cases}$$

ناپیوسته $\Leftarrow$



(۴) $f(x)=\dfrac{2x+1}{|x|-|x+1|}$ $\quad (-\infty, a] \to$ صعودی

	-1		0	
$\dfrac{2x+1}{-x+x+1}=2x+1$		$\dfrac{2x+1}{-x-x-1}=\dfrac{2x+1}{-2x-1}=-1$		$\dfrac{2x+1}{x-x-1}=-2x-1$



← در بازه‌ی $(-\infty,0]$ صعودی است اما صعودی اکید نیست

پس بیشترین مقدار a صفر است ← $a=0$

---

(۵) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-8)$ نزولی $\to \dfrac{1}{\log_{2}(x^2-2x-8)} \to$ صعودی

$0<x^2-2x-8<1 \to x^2-2x-8>0 \to (x+2)(x-4)>0$ $\quad -2,\ 4$

-2		4
$+$	$-$	$+$

$\to x^2-2x-9<0 \to x=\dfrac{2\pm2\sqrt{10}}{2}=1\pm\sqrt{10} \to$

$1-\sqrt{10}$		$1+\sqrt{10}$
$+$	$-$	$+$

$\xrightarrow{\cup} (1-\sqrt{10},-2)\cup(4,1+\sqrt{10})$

(۶) $f(x) = (a^2-3)^x$

الف) تابع f صعودی اکید باشد

$a^2-3>1 \to a^2>4 \to a>2\ ,\ a<-2 \to (-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

ب) تابع f صعودی باشد

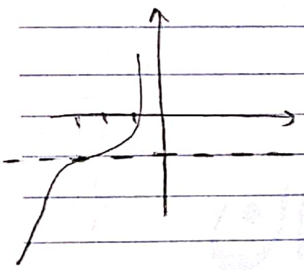
$a^2-3\geq 1 \to a^2\geq 4 \to a\geq 2\ ,\ a\leq -2$

$a^2-3=0 \to a=\pm\sqrt{3}$

$\to (-\infty,-2]\cup[2,+\infty)\cup\{\pm\sqrt{3}\}$

---

(۷) $f(x) = x^3+ax^2+bx+c \to$ در نقطه ی $(-3,-1)$ بر خط موازات محور x ها مماس است

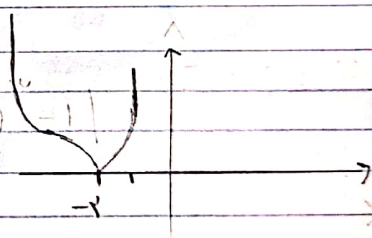


$\to f(x) = (x+3)^3-1 = x^3+9x^2+27x+27-1 =$

$x^3+9x^2+27x+26 = x^3+ax^2+bx+c$

$a=9 \quad b=27 \quad c=26$

$y=|f(x)| \to (k,+\infty) \to$ اکیداً صعود $\to$



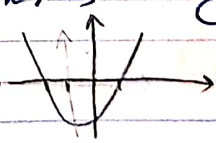
$|(x+3)^3-1|=0 \to (x+3)^3-1=0 \to$

$(x+3)^3=1 \to x+3=1 \to x=-2=k \to (-2,+\infty)$

(۸) چند عدد صحیح

$f(x) = x+\sqrt{x}-2 \qquad f\circ f(x) < f(\sqrt{x}) \to$

$D_f=[0,+\infty) \to \sqrt{x}=t \to t^2+t-2 \to$



پس $x+\sqrt{x}-2$ اکیداً صعودی است

$\cancel{f}(f(x)) \leq \cancel{f}(\sqrt{x}) \to f(x)\leq\sqrt{x} \to$

$x+\sqrt{x}-2 \leq \sqrt{x} \to x-2\leq 0 \to x\leq 2\ ,\ x\geq 0 \xrightarrow{\cap} 0\leq x\leq 2$

$\to \{0,1,2\} \to$ ۳ عدد صحیح

(۹)

$f(x)=2^{\sqrt[3]{9\cos^2 x-1}}-2^{\sqrt[3]{1-9\cos^2 x}}$ ← برد: $[a,b]$ $b-a?$

$\max \rightarrow \cos^2 x=1 \rightarrow 2^{2}-2^{-2}=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

$\min \rightarrow \cos^2 x=0 \rightarrow 2^{-1}-2^{1}=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$

$[a,b]\rightarrow\left[-\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right]\rightarrow b-a=\frac{15}{4}+\frac{6}{4}=\frac{21}{4}$

---

(۱۰)

$f(x)=x-[x+2]$ $\quad g(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2}$ $\quad gof(x)$ برد

$\rightarrow f(x)=x-[x]-2$

$gof(x)=\frac{2^{x-[x]-2}-2^{-(x-[x]-2)}}{2}$

$\rightarrow 2^{x-[x]-3}-2^{-x+[x]+1}$

$\underbrace{x-[x]}_{[0,1)}-3\rightarrow[-3,-2)$ $\qquad$ $\underbrace{-x+[x]}_{(-1,0]}+1\rightarrow(0,1]$