

۱- مساحت مثلث حاصل از برخورد نمودار وارون تابع $2y = 3x - 1$

با محورهای مختصات را بویست آورد $2y = 3x - 1 \rightarrow x = \frac{2y+1}{3}$ (۲)

ضابطه تابع وارون: $y = \frac{2x+1}{3}$ $\begin{cases} x=0 \rightarrow y = \frac{1}{3} \\ y=0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$S = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{12}$ ✓

۲- یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید و در صورت امکان ضابطه تابع معکوس را محاسبه کنید. (در صورت لزوم دامنه و تابع معکوس را مشخص کنید)

الف) $y = x^2 - 2x + 3 \quad x \in [1, +\infty)$

ب) $y = x^2 - 2x + 3 \quad x \in [3, +\infty)$ (۱,۵)

الف) $y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

تابع در دامنه $[1, +\infty)$ یک به یک است ✓

$R_f = [2, +\infty)$

$y - 2 = (x-1)^2 \rightarrow x-1 = \pm \sqrt{y-2} \rightarrow x = 1 \pm \sqrt{y-2}$

ضابطه وارون: $y = 1 \pm \sqrt{x-2}$

$R_f^{-1} = D_f = [1, +\infty)$

$D_f^{-1} = R_f = [2, +\infty)$ ✓

ب) $y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

تابع در دامنه $[3, +\infty)$ یک به یک است ✓

$R_f = [2, +\infty)$

$y - 2 = (x-1)^2 \rightarrow x-1 = \pm \sqrt{y-2} \rightarrow x = 1 \pm \sqrt{y-2}$

ضابطه وارون: $y = 1 \pm \sqrt{x-2}$

$R_f^{-1} = D_f = [3, +\infty)$

$D_f^{-1} = R_f = [2, +\infty)$ ✓

پیدا می شود

۳- تابع f متناهی $f(x) = 2x - \sqrt{16 - 4x(4-x)}$ بازه ای وارون پذیر است. معکوس تابع محدود $f^{-1}(x)$ را نیز بازه باجبت مثبت محور x ها را بیابید

$$f(x) = 2x - \sqrt{16 - 4x(4-x)} = 2x - \sqrt{16 - 16x + 4x^2} = 2x - \sqrt{4(x^2 - 4x + 4)} = 2x - \sqrt{4(x-2)^2} = 2x - |2x - 4|$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2x + 4 = 4 & x \geq 2 \\ 4x - 4 & x < 2 \end{cases}$$

در این بازه تابع یک به یک نیست پس وارون پذیر نیست.

برای $x < 2$: $y = 4x - 4 \rightarrow x = \frac{y+4}{4}$

برای $x \geq 2$: $y = 4$

دامنه: $D_f = (-\infty, 2]$ ، $R_f = (-\infty, 4]$

برای $x \geq 2$: $y = 4$ وارون پذیر نیست.

برای $x < 2$: $y = 4x - 4$ وارون پذیر است.

دامنه وارون: $D_{f^{-1}} = (-\infty, 4]$ ، $R_{f^{-1}} = (-\infty, 2]$

برای $y = 4$: $x = 2$

برای $y < 4$: $x = \frac{y+4}{4}$

دامنه وارون: $D_{f^{-1}} = (-\infty, 4]$ ، $R_{f^{-1}} = (-\infty, 2]$

۴- یک به یک بودن تابع $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$ را بررسی کنید و در صورت امکان متناهی تابع معکوس آن را بیابید. چون $\sqrt{x^2 - 5}$ همواره مثبت است، پس x و y همواره هم علامتین.

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - 5}} \rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2 - 5} = \frac{x_2^2}{x_2^2 - 5}$$

$$\rightarrow x_1^2 x_2^2 - 5x_1^2 = x_2^2 x_1^2 - 5x_2^2 \rightarrow x_1^2 = x_2^2 \rightarrow x_1 = \pm x_2$$

چون یک y نمی تواند به ازای دو x بدست آید پس جواب $x_1 = -x_2$ غلط است و تابع یک به یک است.

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}} \rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{y^2 - 5}} \rightarrow x^2 = \frac{y^2}{y^2 - 5} \rightarrow y^2 x^2 - y^2 = 5x^2 \rightarrow y^2 = \frac{5x^2}{x^2 - 1}$$

چون x و y همواره هم علامتین $y = \frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ غلط است.

$$y = \pm \sqrt{\frac{5x^2}{x^2 - 1}} \rightarrow y = \frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

۵- اگر تابع زوج و یک به یک باشد، حدود K را بیابید.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + K & x \geq 2 \\ -x^2 + 6x + 3K & x < 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + K - 4 & x \geq 2 \\ -(x-3)^2 + 3K + 9 & x < 2 \end{cases}$$

برای $x \geq 2$: $y = (x-2)^2 + K - 4$

برای $x < 2$: $y = -(x-3)^2 + 3K + 9$

در $x = 2$: $y = K - 4$

در $x = 2$: $y = 3K + 9$

برای یک به یک بودن: $3K + 9 \leq K - 4 \rightarrow K \leq -13/2$

پس $K \leq -6.5$

برهان مشرعی
۶- دایره تابع $f(x) = 3x + |x|$ به صورت $g(x) = ax + b/x$ می باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 4x & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases} \rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x & x < 0 \end{cases}$$

حاصل ab را بیابید. (۲)

$$ax + b/x \begin{cases} (f, 1) \rightarrow 4a + 4b = 1 \\ (-f, -1) \rightarrow -2a + 2b = -1 \end{cases} \rightarrow 4b = -1 \rightarrow b = -\frac{1}{4} \rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$x=1 \rightarrow f(x)=4 \rightarrow (1, 4) \in f \rightarrow (4, 1) \in f^{-1}$$

$$x=-1 \rightarrow f(x)=-2 \rightarrow (-1, -2) \in f \rightarrow (-2, -1) \in f^{-1}$$

$ab = \frac{3}{4} \times (-\frac{1}{4}) = -\frac{3}{16}$ ✓

۷- اگر تابع $f(x) = \frac{3x+4}{x+m}$ از نقطه $(1, -1)$ بگذرد، تابع

$$y = f \circ f^{-1}(x) + f^{-1}(x)$$

$$y = \frac{3x+4}{x+m} \xrightarrow{(1, -1)} \frac{1}{1+m} = -1 \rightarrow m = -2 \Rightarrow f(x) = \frac{3x+4}{x-2}$$

(۲)

$$f(x) = \frac{3x+4}{x-2} = y \rightarrow yx - 3y = 3x+4 \rightarrow (y-3)x = 3y+4 \rightarrow x = \frac{3y+4}{y-3}$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{3\} \leftarrow f^{-1}(x) = \frac{3x+4}{x-3}$$

$$f \circ f^{-1}(x) + f^{-1}(x) = x \rightarrow x + \frac{3x+4}{x-3} = x \rightarrow \frac{3x+4}{x-3} = 0$$

$$f \circ f^{-1}(x) = x \quad x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

✓ $x = -\frac{4}{3}$

۸- اگر $f(2-x) = 2 - g(\frac{x}{2})$ و f و g دایره پذیر باشند، حاصل

$$2g^{-1}(4) + f^{-1}(-2)$$

را بیابید. (۲)

$$a = 2 - g(\frac{x}{2}) \rightarrow g(\frac{x}{2}) = 2 - a \rightarrow g^{-1}(2-a) = \frac{x}{2} \rightarrow x = 2g^{-1}(2-a)$$

$$x = \frac{-f(a)+2}{2} \leftarrow f^{-1}(a) = 2-x \leftarrow f(2-x) = a$$

$$\Rightarrow 2g^{-1}(2-a) = \frac{-f(a)+2}{2} \rightarrow 4g^{-1}(2-a) = -f(a)+2$$

$a = -2$

$$2g^{-1}(4) + f^{-1}(-2) = 2 \leftarrow 2g^{-1}(4) = -f^{-1}(-2) + 2$$

✓

پرهام مشرعی

۹- قرینه تابع $y = \frac{5x-13}{1-x}$ نسبت به مبدأ مختصات را در واحد به

راست و سه واحد به پایین انتقال می دهیم تا تابع f بدست آید.

مجموع طول نقاط برخورد f و f^{-1} را بدست آوریم.

$y = \frac{5x-13}{1-x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ مختصات}} -y = \frac{-5x-13}{x+1} \rightarrow y = \frac{5x+13}{x+1}$ (۲)

ست $\rightarrow y = \frac{5(x-2)+13}{(x-2)+1} = \frac{5x+3}{x-1} \xrightarrow{\text{راست ۳ واحد}} y = \frac{5x+9}{x-1} - 3 = \frac{5x+9-3x+3}{x-1} = \frac{2x+12}{x-1}$

$f(x) = \frac{2x-6}{x-1} = y \rightarrow yx - y = 2x + 6 \rightarrow yx - 2x = y + 6 \rightarrow x = \frac{y+6}{y-2} \rightarrow y = \frac{x+6}{x-2}$

$f(x) = f^{-1}(x) = \frac{2x+12}{x-1} = \frac{x+6}{x-2} \rightarrow x^2 + 5x - 6 = 2x^2 + 2x - 12 \rightarrow x^2 - 3x - 6 = 0$

← نتیجه های این معادله، طول نقاط برخورد f و f^{-1} هستند.

$\rightarrow z = \frac{b}{a} = 3$ ✓ مجموع درستی

۱۰- قرینه نمودار $f(x) = x + f[x]$ نسبت به خط $y = x$ را $g(x)$ می نامیم.

منابع تابع $(f-g)(x)$ را بیابید. قرینه f نسبت به $y = x$ همان وارون f است.

$f(x) = x + f[x] \rightarrow y = x + f[x] \xrightarrow{\text{ضابطه وارون}} x = y + f[y] \rightarrow y = x - f[y]$ (۲) *

$[x] = [y + f[y]] \rightarrow [x] = d[y] \rightarrow [y] = \frac{[x]}{d} \xrightarrow{*} f(x) = x - \frac{f[x]}{d}$

$(f-g)(x) = x + f[x] - (x - \frac{f[x]}{d}) = \frac{d+1}{d} f[x] = f_{1,d}[x]$ ✓