

۱- مساحت مثلث حاصل از برخورد نمودار وارون تابع $2y = 3x - 1$

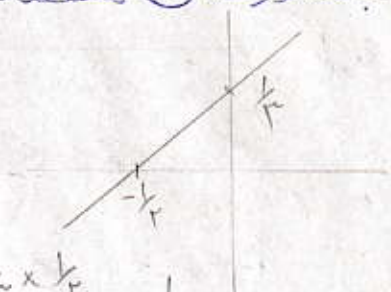
با محورهای مختصات را بویست آورد

$$2y = 3x - 1 \rightarrow x = \frac{2y + 1}{3}$$

ضایعه تابع وارون

$$\begin{cases} x=0 \rightarrow y = \frac{1}{2} \\ y=0 \rightarrow x = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

$$S = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{12}$$



۲- یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید و در صورت امکان ضایعه تابع تابع معکوس را محاسبه کنید. (در صورت لزوم دامنه و تابع معکوس را مشخص کنید)

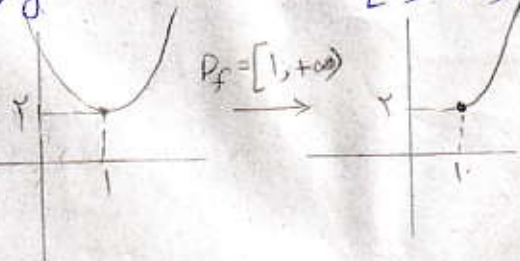
الف) $y = x^2 - 2x + 3 \quad x \in [1, +\infty)$

ب) $y = x^2 - 2x + 3 \quad x \in [3, +\infty)$

الف) $y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

تابع در دامنه $[1, +\infty)$ یک به یک است

$$R_f = [2, +\infty)$$



$$y - 2 = (x-1)^2 \rightarrow x-1 = \pm \sqrt{y-2} \rightarrow x = 1 \pm \sqrt{y-2}$$

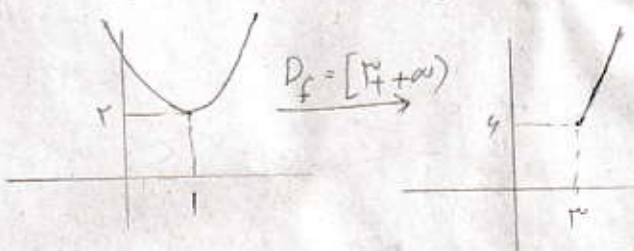
ضایعه وارون: $y = 1 \pm \sqrt{x-2}$

$$R_f^{-1} = D_f = [1, +\infty) \quad D_f^{-1} = R_f = [2, +\infty)$$

ب) $y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

تابع در دامنه $[3, +\infty)$ یک به یک است

$$R_f = [6, +\infty)$$



$$y - 2 = (x-1)^2 \rightarrow x-1 = \pm \sqrt{y-2} \rightarrow x = 1 \pm \sqrt{y-2}$$

ضایعه وارون: $y = 1 \pm \sqrt{x-2}$

$$R_f^{-1} = D_f = [3, +\infty)$$

$$D_f^{-1} = R_f = [6, +\infty)$$

پیدا می شود

۳- تابع f متناهی $f(x) = 2x - \sqrt{16 - 4x(4-x)}$ بازه ای وارون پذیر است.
 معادلت ناصیه محدود $f^{-1}(n)$ را بر این بازه با حبت مثبت محور x ها را بیابید

$$f(x) = 2x - \sqrt{16 - 4x(4-x)} = 2x - \sqrt{16 - 16x + 4x^2} = 2x - \sqrt{4(x^2 - 4x + 4)} = 2x - \sqrt{4(x-2)^2} = 2x - |2x - 4|$$

در این بازه تابع یک به یک نیست پس وارون پذیر نیست.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2x + 4 = 4 & x \geq 2 \\ 4x - 4 & x < 2 \end{cases}$$

$y = 4x - 4 \rightarrow x = \frac{y+4}{4}$

$R_f = (-\infty, 4] \leftarrow D_f = (-\infty, 2]$ $y = \frac{x+4}{4}$ وارون $D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 4]$

۴- یک به یک بودن تابع $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}}$ را بررسی کنید و در صورت امکان متناهی تابع معکوس آن را بیابید. چون $\sqrt{x^2-5}$ همواره مثبت است، پس x و y همواره هم علامتین.

(جواب $x_1 = -x_2$ بخاطر $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-5} = \frac{x_2^2}{x_2^2-5}$ به توان ۲ رساندن وارد بشود است)

چون یک y $\rightarrow x_1^2 x_2^2 - 5x_1^2 = x_2^2 x_1^2 - 5x_2^2 \rightarrow x_1^2 = x_2^2 \rightarrow x_1 = \pm x_2$ نمی تواند به ازای دو x بدست آید پس جواب $x_1 = -x_2$ غلط است و تابع یک به یک است.

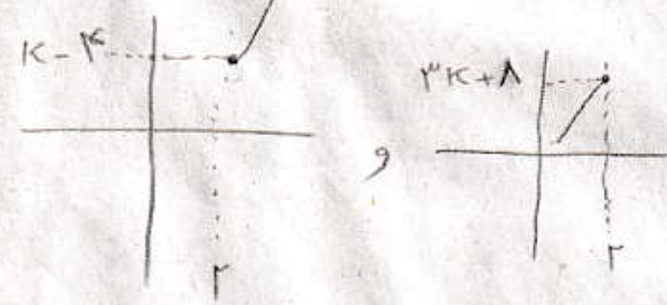
$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{y^2-5}} \rightarrow x^2 = \frac{y^2}{y^2-5} \rightarrow y^2 x^2 - y^2 = 5x^2 \rightarrow y^2 = \frac{5x^2}{x^2-1}$

(چون x و y همواره هم علامتین $y = \frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{x^2-1}}$ غلط است)

$$y = \pm \sqrt{\frac{5x^2}{x^2-1}} \rightarrow y = \frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{x^2-1}}$$

۵- اگر تابع g رو به بالا یک به یک باشد، حدود K را بیابید

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + K & x \geq 2 \\ -x^2 + 6x + 3K & x < 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + K - 4 & x \geq 2 \\ -(x-3)^2 + 3K + 9 & x < 2 \end{cases}$$



$3K + 9 \leq K - 4 \rightarrow K \leq -\frac{13}{2}$
 $\rightarrow K \leq -6.5$

برهان مشرعی
۶- واحد تابع $f(x) = 3x + \frac{1}{x}$ به صورت $g(x) = ax + b/x$ می باشد.

حاصل ab را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} 3x & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases} \rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x & x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x & x < 0 \end{cases}$$

$$ax + b/x \begin{cases} (f, 1) \rightarrow 3a + 3b = 1 \\ (-2, -1) \rightarrow -2a + 2b = -1 \end{cases} \rightarrow 1b = -1 \rightarrow b = \frac{-1}{1} \rightarrow a = \frac{3}{1}$$

$$x=1 \rightarrow f(x)=3 \rightarrow (1, 3) \in f \rightarrow (3, 1) \in f^{-1}$$

$$x=-1 \rightarrow f(x)=-2 \rightarrow (-1, -2) \in f \rightarrow (-2, -1) \in f^{-1}$$

$$ab = \frac{3}{1} \times \left(\frac{-1}{1}\right) = \frac{-3}{1}$$

۷- اگر تابع $f(x) = \frac{3x+3}{x+m}$ از نقطه $(2, -1)$ بگذرد، تابع

$y = f \circ f^{-1}(x) + f^{-1}(x)$ نیز تابع اول و سوم را با کدام طول قطع می کند؟

$$y = \frac{3x+3}{x+m} \xrightarrow{(2, -1)} \frac{10}{2+m} = -1 \rightarrow m = -3 \Rightarrow f(x) = \frac{3x+3}{x-3}$$

$$f(x) = \frac{3x+3}{x-3} = y \rightarrow yx - 3y = 3x+3 \rightarrow (y-3)x = 3y+3 \rightarrow x = \frac{3y+3}{y-3}$$

$$D_{f^{-1}} = R - \{3\} \leftarrow f^{-1}(x) = \frac{3x+3}{x-3} \leftarrow \frac{y-3}{y-3}$$

$$f \circ f^{-1}(x) + f^{-1}(x) = x \rightarrow x + \frac{3x+3}{x-3} = x \rightarrow \frac{3x+3}{x-3} = 0$$

$$f \circ f^{-1}(x) = x \quad x \in R - \{3\}$$

$$x = -\frac{3}{3}$$

۸- اگر $f(2-x) = 2 - g\left(\frac{x}{2}\right)$ و f و g واحد پذیر باشند، حاصل

$2g^{-1}(4) + f^{-1}(-2)$ را بیابید.

$$x = \frac{-f(a)+2}{2} \leftarrow f^{-1}(a) = 2-2x \leftarrow f(2-2x) = a$$

$$a = 2 - g\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow g\left(\frac{x}{2}\right) = 2-a \rightarrow g^{-1}(2-a) = \frac{x}{2} \rightarrow x = 2g^{-1}(2-a)$$

$$\Rightarrow 2g^{-1}(2-a) = \frac{-f(a)+2}{2} \rightarrow 2g^{-1}(2-a) = -f(a)+2 \quad a = -2$$

$$2g^{-1}(4) + f^{-1}(-2) = 3 \leftarrow 2g^{-1}(4) = -f^{-1}(-2) + 3$$

پرهام مشرعی

۹- قرینه تابع $y = \frac{5x-13}{1-x}$ نسبت به مبدأ مختصات را در واحد به

راست و سه واحد به پایین انتقال می دهیم تا تابع f بدست آید.

مجموع طول نقاط برخورد f و f^{-1} را بدست آوریم.

$y = \frac{5x-13}{1-x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ مختصات}} -y = \frac{-5x-13}{x+1} \Rightarrow y = \frac{5x+13}{x+1}$

$\xrightarrow{\text{۲ واحد به بالا}} y = \frac{5(x-2)+13}{(x-2)+1} = \frac{5x+3}{x-1} \xrightarrow{\text{۳ واحد به راست}} y = \frac{5x+9}{x-1} - 3 = \frac{5x+9-3x+3}{x-1} = \frac{2x+12}{x-1}$

$f(x) = \frac{2x-6}{x-1} = y \rightarrow yx - y = 2x + 6 \rightarrow yx - 2x = y + 6 \rightarrow x = \frac{y+6}{y-2} \rightarrow y^{-1} = \frac{x+6}{x-2}$

$f(x) = f^{-1}(x) = \frac{2x+12}{x-1} = \frac{x+6}{x-2} \rightarrow x^2 + 5x - 6 = 2x^2 + 2x - 12 \rightarrow x^2 - 3x - 6 = 0$

← مقادیر x این معادله، طول نقاط برخورد f و f^{-1} هستند.
 $\rightarrow z = \frac{b}{a} = 3$ مجموع ریشه

۱۰- قرینه نمودار $f(x) = x + f[x]$ نسبت به خط $y = x$ را $g(x)$ می نامیم.

منابع تابع $(f-g)(x)$ را بیابید. قرینه f نسبت به $y = x$ همان وارون f است.

$f(x) = x + f[x] \rightarrow y = x + f[x] \xrightarrow{\text{ضابطه وارون}} x = y + f[y] \rightarrow y = x - f[y]$

$\downarrow$
 $[x] = [y + f[y]] \Rightarrow [x] = d[y] \rightarrow [y] = \frac{[x]}{d} \xrightarrow{*} f(x) = x - \frac{f[x]}{d}$
 $\downarrow$
 $g(x)$

$(f-g)(x) = x + f[x] - (x - \frac{f[x]}{d}) = \frac{d+1}{d} f[x] = f_{1,d}[x]$