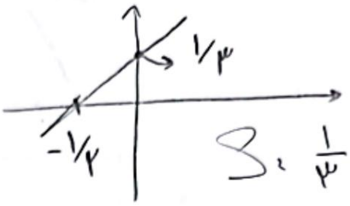
16.5

محمدعماد عوض‌آبادی / دوازدهم ری A

۱- ②

$3x-1=2y \rightsquigarrow 2x=3y-1 \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{3}$



$S=\frac13\times\left|-\frac12\right|\times\frac12=\boxed{\frac1{12}}$ ✓

۲- ②

الف) $(x-1)^2+2=y,\ x\in[1,+\infty)$

ens $\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ ⇒ تابع یک به یکه!

$\Rightarrow f^{-1}(x):\ x=(y-1)^2+2\rightarrow x-2=(y-1)^2$

$\Rightarrow y^{-1}=\sqrt{x-2}+1$ ✓ $\rightarrow D_{f^{-1}(x)}=[2,+\infty)$ ✓

ب) $y=x^2-2x+3,\ x\in[3,+\infty)$

ent $\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ $\rightarrow R_f=D_{f^{-1}}$

$\downarrow$

$R_f=3^2-2(3)+3=6$

$[6,+\infty)$

$\Rightarrow y^{-1}=\sqrt{x-2}+1$ ✓

$\Rightarrow D_{f^{-1}(x)}=[6,+\infty)$ ✓

۳- 0

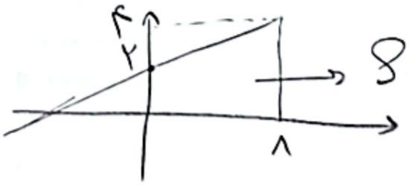
$f(x)=2x-\sqrt{4(4-x)^2}=2x-2|4-x|$

نمیتونی فاکتور بگیری

در دامنه خود یک به یک و اکیداً صعودیه!

$f(x)=4x-8\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{4}+2$

$R_{f(x)}=(-\infty,8]\Rightarrow D_{f^{-1}}=(-\infty,8]$



$\rightarrow S=\frac{(2+4)8}{2}=\boxed{\cancel{24}}$

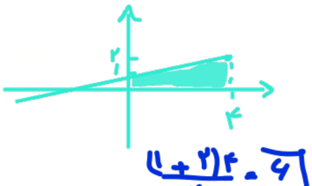
$f(x)=2x-\sqrt{16-16x+4x^2}$

$4(x^2-4x+4)$

$f(x)=2x-2|x-2|$ $\rightarrow x\geq2\rightarrow 4$; $x\leq2\rightarrow 4x-4$ ✓

$\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{4}+1$

$D_{f^{-1}}=R_f=(-\infty,4]$



$\frac{(1+2)4}{2}=\boxed{6}$

۴- ②

$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \rightsquigarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}}$

$\Rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-5}=\frac{x_2^2}{x_2^2-5}\rightarrow x_1^2x_2^2-5x_1^2=x_1^2x_2^2-5x_2^2$

$\Rightarrow x_1=\pm x_2\rightarrow x_1=x_2\Rightarrow$ ✓ یک به یک

x و y باید هم علامت باشند

$f^{-1}(x)=\frac{y}{\sqrt{y^2-5}}\rightarrow x^2=\frac{y^2}{y^2-5}$

$\rightarrow x^2y^2-5x^2=y^2\rightarrow y^2=\frac{5x^2}{x^2-1}$

$\Rightarrow |y|=\sqrt{\frac{5x^2}{x^2-1}}\rightarrow |y|=\frac{\sqrt5|x|}{\sqrt{x^2-1}}$

$y^{-1}=\frac{\sqrt5\,x}{\sqrt{x^2-1}}$ ✓ $\Leftarrow$ x و y هم علامت‌اند

۵- ②

$g(x)=\begin{cases}x^2-4x+k & x\geq2\rightarrow \text{ent}\ |2\\ -x^2+6x+3k & x<2\rightarrow \text{em}\ |3\end{cases}$

$\Rightarrow x=2\rightarrow k-4\geq 3k+8\rightarrow k\leq-6$ ✓

۶- ②

$f(x)=3x+|x| \rightsquigarrow \begin{cases}4x & x\geq0\\ 2x & x<0\end{cases}$

$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac14 x & x\geq0\\ \frac12 x & x<0\end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1.5x}{4}-\frac{0.5}{4}|x|\rightarrow\frac{15x-5|x|}{40}$

$\Rightarrow a=\frac{15}{40}=\frac38$ ✓

$b=\frac{-5}{40}=-\frac18$ ✓

$\frac38\times\left(-\frac18\right)=\boxed{-\frac{3}{64}}$ ✓

۱۰- ۰/۵

$$f(x)=x+۴[x] \xrightarrow{\text{قرینه نسبت}} x=y+\cancel{۴}[y] \quad \frac{[x]}{۵}$$

به نیمساز اول و سوم

چون اینجا جای x و y رو عوض کردی باید اونجام عوض شه!

$$۴(\cancel{۵[x]})$$

$$[y]=[x]+۴[x] ✓$$

$x-۰٫۸[x]$

$$\Rightarrow g(x)=x-۴\cancel{۵}[x]$$

$$[x]=۵[y] \xleftarrow[\text{x و y}]{\text{تعویض جای}} [y]=۵[x]$$

$$f(x)-g(x)=x+۴[x]-x+۴\cancel{۵}[x] \quad \boxed{۴\cancel{۵}[x]}$$

۰٫۸ ۴٫۸

۷- ۲

$$f(x)=\frac{۳x+۴}{x+m} \quad f(۲)=-۱۰ \rightsquigarrow \frac{۱۰}{۲+m}=-۱۰ \Rightarrow m=-۳$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۳x+۴}{x-۳} \Rightarrow x\neq۳ \rightsquigarrow f(-۱۰)=۲$$

=> تابع با معکوسش یکیه!

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{۳x+۴}{x-۳}, x\neq+۳$$

$$\underbrace{\cancel{f(f^{-1}(x))}}_{x}+f^{-1}(x)=x+\frac{۳x+۴}{x-۳}=x$$

$$\Rightarrow ۳x+۴=0 \rightarrow \boxed{x=-۴/۳} ✓$$

۸- ۲

$$g(x)=t$$

$$f(۳-۲x)=۲-g(x/۲) \Rightarrow g(\tfrac{x}{۲})=۲-f(۳-۲x)$$

$$\Rightarrow f(۳-۴x)=۲-t$$

$$f^{-1}(۲-t)=۳-۴x \rightsquigarrow f^{-1}(۲-t)=۳-۴g^{-1}(t)$$

$$g^{-1}(t)=x$$

$$\Rightarrow ۴g^{-1}(t)=۳-f^{-1}(۲-t)$$

$$\Rightarrow ۴g^{-1}(۴)=۳-f^{-1}(-۲) \Rightarrow f^{-1}(-۲)+۴g^{-1}(۴)=\boxed{۳} ✓$$

۹- ۲

$$y=\frac{۵x-۱۳}{۱-x} \xrightarrow[\text{به مبدا}]{\text{قرینه نسبت}} -y=\frac{-۵x+۱۳}{۱+x}$$

$$\Rightarrow y=\frac{۵x+۱۳}{۱+x} \rightarrow \frac{۵(x-۲)+۱۳}{۱+x-۲}=\frac{۵x+۳}{x-۱}$$

$$\rightarrow \frac{۵x+۳}{x-۱}-۳=\frac{۲x+۶}{x-۱} \rightarrow f^{-1}(x)=$$

$$x=\frac{۲y+۶}{y-۱} \rightarrow xy-x=۲y+۶ \rightarrow y^{-1}=\frac{۶+x}{x-۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۶+x}{x-۲}=\frac{۲x+۶}{x-۱} \rightarrow x^۲-۳x-۶=0$$

$x-۲ \downarrow x\neq۲$, $x-۱ \downarrow x\neq۱$

$$S=\frac{-b}{a}=\boxed{۳} ✓$$