نام و نام خانوادگی ...امیرعلی زارموزی...... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره .... کلاس ....

۱

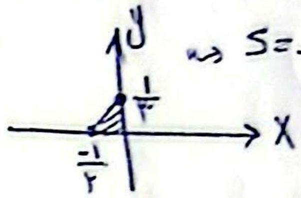
$2y = 3x-1 \xrightarrow{\text{معکوس تابع}} 2y+1=3x \Rightarrow 3y=2x+1 \Rightarrow y=\frac{2x+1}{3}$

جای x و y را عوض می‌کنیم

$x=0 \Rightarrow y=\frac{2(0)+1}{3}=\frac{1}{3}$

و

$y=0 \Rightarrow 0=2x+1 \Rightarrow x=\frac{-1}{2}$



$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

۲

الف) راس $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2\times1}=1 \Rightarrow$ چون دامنه فقط حدود صعودی از آن را شامل می‌شود یک به یک است.

$y=(x-1)^2+2 \Rightarrow y-2=(x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{y-2}+1=x \xrightarrow{\text{جابجایی } x \text{ و } y} y=\sqrt{x-2}+1$

دامنه معکوس تابع = برد تابع اصلی ⇒ دامنه معکوس ⇒ $x=1$ و $y_{min}=1-2+3=2 \Rightarrow Df'(x)=[2,+\infty)$

ب) راس $x=\frac{-b}{2a}=1 \Rightarrow$ مثل حالت بالا چون ۳ از ۱ بزرگ‌تر است تابع یک به یک است

$y=\sqrt{x-2}+1$ مثل حالت بالا ✓

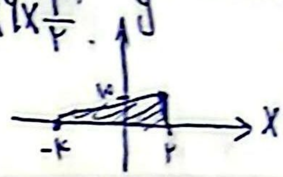
$x=3 \Rightarrow y_{min}=9-6+3=6 \Rightarrow Df'(x)=[6,+\infty)$

۳

$f(x)=2x-\sqrt{4x^2-16x+16}=2x-2\sqrt{\underbrace{x^2-4x+4}_{|x-2|}} \Rightarrow f(x)=2x-2|x-2|$

$f(x)\begin{cases}4 & x\geq 2 \\ 4x-4 & x<2\end{cases}$ وارون‌پذیر نیست ⇒

$f^{-1}: y'=4x-4 \Rightarrow y+4=4x \rightarrow y'=\frac{x}{4}+1$



$S=\frac{1}{2}\times6\times\frac{3}{2} \rightarrow S=4.5$

۴

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \Rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-5}=\frac{x_2^2}{x_2^2-5} \Rightarrow x_1^2=x_2^2$

چون مخرج همواره مثبت است پس x_1 و x_2 نمی‌توانند علامت مخالف داشته باشند ⇐ $x_1=x_2$ ← یک به یک است

$y\sqrt{x^2-5}=x \Rightarrow y^2(x^2-5)=x^2 \Rightarrow y^2x^2-5y^2=x^2 \Rightarrow y^2x^2-x^2=5y^2$

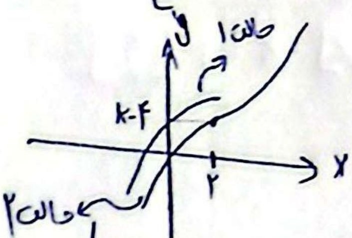
$\Rightarrow x^2(y^2-1)=5y^2 \Rightarrow x^2=\frac{5y^2}{y^2-1} \xrightarrow{\text{جابجایی } x \text{ و } y} f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{5y^2}{y^2-1}}$

۵

$g(x)=\begin{cases}x^2-4x+k & : x\geq 2 \\ -x^2+6x+3k & : x<2\end{cases}$

راس $x=\frac{-b}{2a}=\frac{+4}{2}=2 \Rightarrow$ صعودی

$x=2 \Rightarrow 4-8+k \Rightarrow y=k-4$



طبق اینکه ضریب a در بخش دوم منفی است، نمودار رو به پایین است و تنها حالت ۲ قابل پذیرش است.

$x=2 \Rightarrow y=-4+12+3k=3k+8$

$k-4\geq 3k+8 \Rightarrow -12\geq 2k \Rightarrow -6\geq k$

نمودار کاملاً فرضی

۶

$$f(x)=\begin{cases}4x & x\geq 0\\ 2x & x<0\end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x & x\geq 0\\ \frac{1}{2}x & x<0\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x\geq 0 \to ax+bx=\frac{1}{4}x \\ x<0 \to ax-bx=\frac{1}{2}x \end{array}$$

$$\downarrow\ 2ax=\frac{3}{4}x \to a=\frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8}x+bx=\frac{1}{4}x \Rightarrow bx=\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}x \Rightarrow b=\frac{-1}{8}$$

$$ab=\frac{3}{8}\times\frac{-1}{8}=\frac{-3}{64}$$

۷

$$f(x)=\frac{3x+4}{x+m} \to (2,-10) \Rightarrow -10=\frac{3\times 2+4}{2+m} \Rightarrow -m-2=1 \Rightarrow \boxed{m=-3}$$

$$y=\underbrace{f(f^{-1}(x))}_{x}+f^{-1}(x) \xrightarrow{\text{قطع نیمساز اول ربع}} x=x+f^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=0 \Rightarrow f(0)=x,\quad f(x)=\frac{3x+4}{x-3} \Rightarrow f(0)=\frac{3(0)+4}{(0)-3}=\frac{-4}{3}$$

۸

$$\frac{x}{2}=t \Rightarrow x=2t \to f(3-4t)=2-g(t) \Rightarrow g(t)=2-f(3-4t)$$

$$g(t)=4 \Rightarrow g^{-1}(4)=t \to 4=2-f(3-4t) \Rightarrow f(3-4t)=-2$$

$$\downarrow\ f^{-1}(-2)=3-4t$$

$$4\underbrace{g^{-1}(4)}_{t}+\underbrace{f^{-1}(-2)}_{3-4t}=4t+3-4t=3$$

۹

$$y=\frac{5x-13}{1-x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}} y_2=-\frac{5(-x)-13}{1-(-x)} \Rightarrow y_2=-\frac{-5x-13}{x+1}$$

$$y_2=\frac{5x+13}{x+1} \xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} y_3=\frac{5(x-2)+13}{x-2+1}=\frac{5x+3}{x-1} \xrightarrow{\text{۳ واحد به پایین}}$$

$$y=\frac{5x+3-3x+3}{x-1} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{2x+6}{x-1} \\ f^{-1}(x)=\frac{x+6}{x-2}\end{array}\right\} \to \frac{2x+6}{x-1}=\frac{x+6}{x-2} \Rightarrow 2x^2+2x-12=x^2+5x-6$$

$$\Rightarrow x^2-3x-6=0 \to x_1+x_2=\frac{-b}{a}=3$$

۱۰

$$f(x)=x+4[x] \to x\in[n,n+1) \Rightarrow y=[5n,5n+1)$$

$$f^{-1}:\ x\in[5n,5n+1) \Rightarrow y=[n,n+1)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=x-4\left[\frac{x}{5}\right]=g(x)$$

x را معادل 5n فرض کردیم

$$(f-g)(x)=\cancel{x}+4[x]-\cancel{x}+4\left[\frac{x}{5}\right]$$

$$\Rightarrow (f-g)(x)=4[x]+4\left[\frac{x}{5}\right]$$