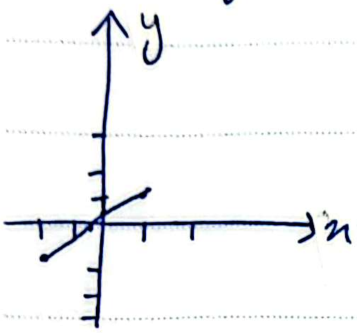
پرهام مقیمی — تکلیف ۱۰ — عالی نوشتی ۲۰ — ۱۲ پسر A

Subject: Date:

۱) (۲)

$$2y = 3x - 1 \xrightarrow[x \leftrightarrow y]{\text{وارون}} 2x = 3y - 1 \Rightarrow 3y = 2x + 1 \rightarrow y = \frac{2x+1}{3}$$

x	0	1	-2	$-\frac{1}{2}$
y	$\frac{1}{3}$	1	-1	0

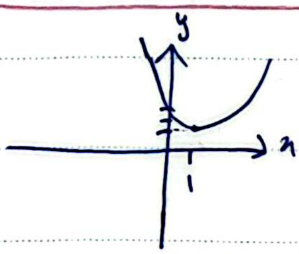


$\Rightarrow \Delta \; \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{12}}$$

۲) (۲)

الف) و ب)



$y = x^2 - 2x + 3$

x	0	1	2	3
y	3	2	3	6

$x_S = 1$

$y_S = 2$

هر دو یک به یک هستند زیرا از رأس به بعد در دامنه است.

الف) $y = x^2 - 2x + 3 \rightarrow y = (x-1)^2 + 2 \xRightarrow{\text{معکوس}} x = (y-1)^2 + 2 \rightarrow x - 2 = (y-1)^2 \rightarrow \sqrt{x-2} = y - 1 \xrightarrow{+1} \boxed{y = \sqrt{x-2} + 1}$

الف) $x \in [2, +\infty)$

ب) $x \in [6, +\infty)$

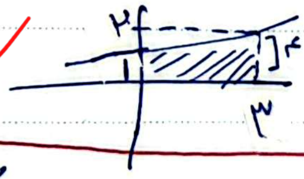
۳) (۲)

$$f(x) = 2x - \sqrt{16 - 4x(4-x)} = 2x - \sqrt{(2x-4)^2} \rightarrow 2x - |2x - 4|$$

$$x \in (-\infty, 2] \rightarrow f(x) = 4x - 4 \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{4} \qquad R_{fog} = (-\infty, 4]$$

$D_{f^{-1}(x)}$

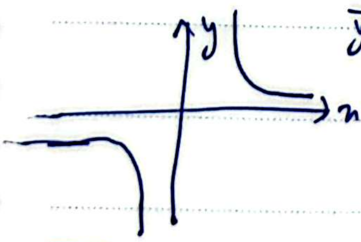
$$S = \frac{(1 \times 4)}{2} + 4 = \boxed{6}$$



۴) (۲)

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$ صعودی نزولی (هم‌گرافیکی) $\Rightarrow$ یک به یک ✓

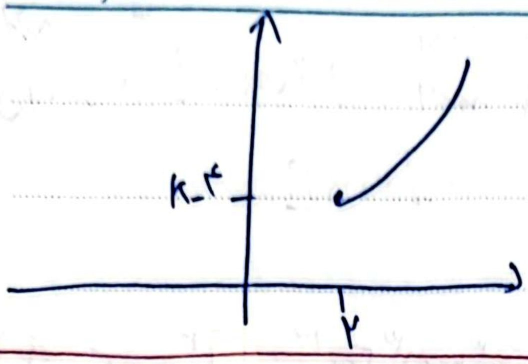
x	-3	3
y	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$



$$f^{-1} \rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{y^2 - 5}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2 = \frac{y^2}{y^2 - 5} \rightarrow x^2 y^2 - 5x^2 = y^2 \rightarrow y^2(x^2 - 1) = 5x^2$$

$$\rightarrow |y| = \frac{\sqrt{5}\,|x|}{\sqrt{x^2 - 1}} \xleftarrow[\text{صعودی}]{\text{هم علامت}} \boxed{y^{-1} = \frac{\sqrt{5}\,x}{\sqrt{x^2 - 1}}}$$

Subject: Date:



(۵) (۲)

$$g(x)=\begin{cases} x^2-4x+k & x\geq 2 \\ x^2+6x+3k & x<2 \end{cases}$$

$x_s=-3$

$x_s=\frac{-b}{2a}=2$

$x=2 \rightarrow$ یک به یک $\Rightarrow k-4\geq 3k+8 \Rightarrow \boxed{k\leq -6}$

---

(۶) (۲)

$f(x)=3x+|x| \rightarrow x\geq 0 \Rightarrow 4x$

$\rightarrow x<0 \rightarrow 2x$

$\rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}x & x\geq 0 \\ \frac{1}{2}x & x<0 \end{cases}$

$f^{-1}(x)=\frac{\frac{3}{2}x}{4}-\frac{\frac{1}{2}}{4}|x| \Rightarrow a=\frac{3}{8},\ b=-\frac{1}{8} \xrightarrow{\times} \frac{3}{8}\times -\frac{1}{8}=\boxed{-\frac{3}{64}}$

---

(۷) (۲)

$f(x)=\frac{3x+4}{x+k} \xrightarrow{(2,-10)} -10=\frac{10}{2+k} \Rightarrow \boxed{k=-3}$ / $f(x)=\frac{3x+4}{x-3},\ x\neq 3$

$x=-10 \rightarrow f(-10)=\frac{-30+4}{-13}=2 \Rightarrow$ وارون $=$ ق.ب

$f^{-1}(x)=\frac{3x+4}{x-3},\ x\neq 3 \Rightarrow y=\underbrace{f\circ f^{-1}(x)}_{x}+\underbrace{f^{-1}(x)}_{f(x)\ \text{در اینجا}}=x+\frac{3x+4}{x-3}=0$

$x=-\frac{4}{3}$

---

(۸)★ (۲)

$f(3-2x)=2-g(\frac{x}{2}) \rightarrow g(\frac{x}{2})=2-f(3-2x) \rightarrow g(x)=t=2-f(3-4x)$

$g(x)=t$

$f(3-4x)=2-t$

$f^{-1}(2-t)=3-4x$

$g^{-1}(t)=x$

$f^{-1}(2-t)=3-4g(t)^{-1}$

$4g(t)^{-1}=3-f^{-1}(2-t) \xrightarrow{t=4} 4g^{-1}(4)+f^{-1}(-2)=3$

---

(۹) (۲)

$y=\frac{5x-13}{1-x} \xrightarrow[\text{نسبت به مبدا}]{\text{قرینه}} -y=\frac{-5x+13}{1+x} \xrightarrow[\text{واحد}]{\text{۲ راست}} \frac{5(x-2)+13}{1+(x-2)}=\frac{5x+3}{x-1} \xrightarrow[\text{پایین}]{\text{۳ واحد}} \frac{5x+3}{x-1}-3$

در آخر از صورت ۲ طرف منفی را ساده کردیم

$= f(x)=\frac{2x+6}{x-1}$

$y=\frac{x+6}{x-2}=f^{-1}(x)$

$\underset{f^{-1}(x)}{\frac{6+x}{x-2}}=\underset{f(x)}{\frac{2x+6}{x-1}} \Rightarrow x^2+5x-6=2x^2+2x+12 \rightarrow x^2-3x-18=0$

$\rightarrow x\neq 1,2$ $\quad S=\frac{-b}{a}=3$

---

(۱۰) (۲)

$f(x)=x+4[x] \xrightarrow[y=x]{\text{قرینه به}} f^{-1}(x)=g(x) \Rightarrow y=x-4[y] \Rightarrow f^{-1}(x)=x-\frac{4}{5}[x]$

$[y]=[x-4[x]] \Leftrightarrow [y]=\frac{[x]}{5}$

$\frac{24}{5}[x] \Leftarrow$ جواب $\quad f(x)-f^{-1}(x)=x+4[x]-x+\frac{4}{5}[x]=\frac{24}{5}[x]$