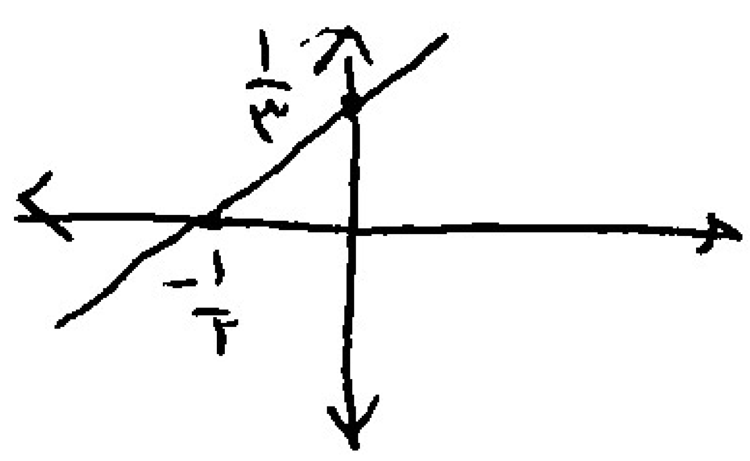
بنام خدا

۱- $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \rightarrow y^{-1} = \frac{2x + 1}{3} = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$



$S = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

۲- الف) $x_s = \frac{2}{2} = 1$ تابع معکوس پذیر است $\rightarrow y = (x-1)^2 + 2 \rightarrow \sqrt{y-2} = |x-1|$

$\xrightarrow{x \geq 1} \sqrt{y-2} + 1 = x \xrightarrow[y \text{ و } x]{\text{عوض کردن}} \sqrt{x-2} + 1 = y = f^{-1}(x); \quad D_{f^{-1}} = [2, \infty)$

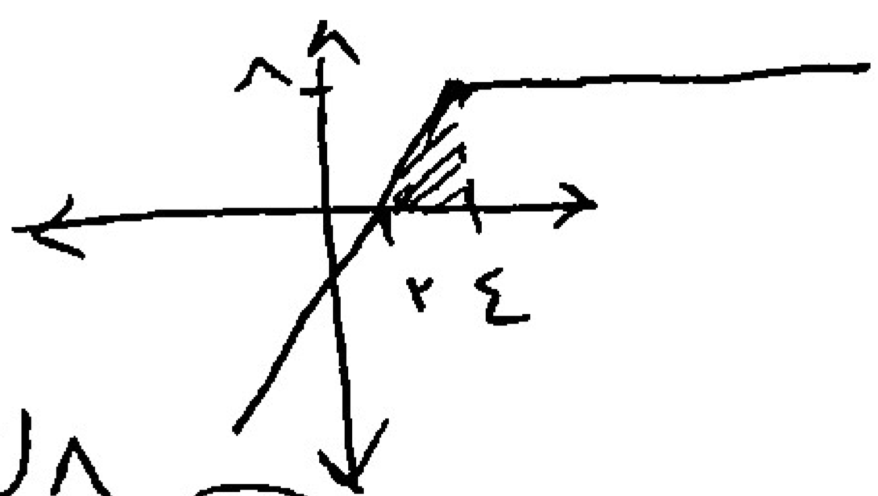
ب) $x_s = 1$ تابع وارون پذیر است $\rightarrow$ مشابه قسمت بالا $\rightarrow \sqrt{x-2}+1 = y = f^{-1}(x)$

$R_f = [6, \infty) \rightarrow D_{f^{-1}} = [6, \infty)$

۳- $f(x) = 2x - 2|4-x|$

if $x \geq 4$: $f(x) = 8$

if $x < 4$: $f(x) = 4x - 8$



$S = \frac{(4-2)8}{2} = 8$

۴- $y^2 = \frac{x^2}{x^2-5} \longrightarrow x^2 = \frac{5y^2}{y^2-1} \rightarrow |x| = \sqrt{\frac{5y^2}{y^2-1}} = \frac{\sqrt{5}|y|}{\sqrt{y^2-1}}$

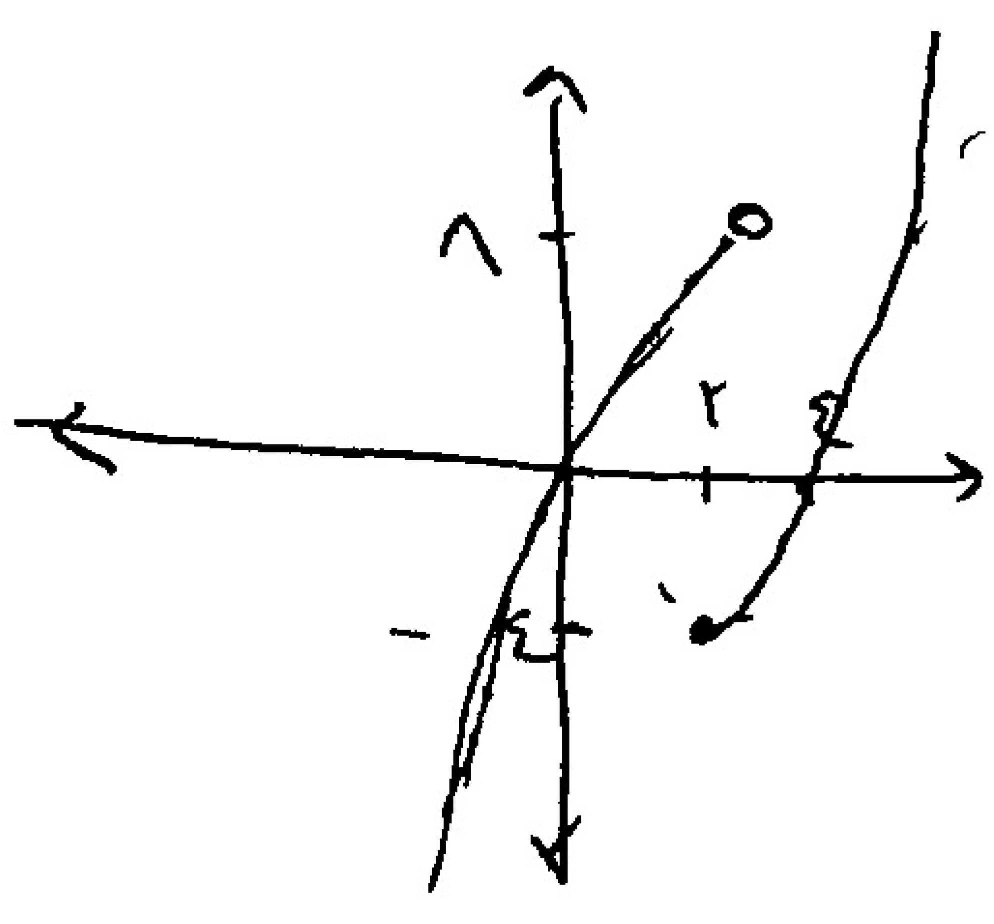
$\xrightarrow[\text{هم علامتند}]{xy \geq 0} x = \frac{\sqrt{5}y}{\sqrt{y^2-1}} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{x^2-1}}$

$\xrightarrow{\text{اثبات یک به یک بودن}}$ $\left.\begin{aligned} y_1^2 &= \frac{x_1^2}{x_1^2-5} \\ y_2^2 &= \frac{x_2^2}{x_2^2-5} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{y_1 = y_2} \frac{x_1^2}{x_1^2-5} = \frac{x_2^2}{x_2^2-5} \xrightarrow[\text{هم علامتند}]{x_1x_2 \geq 0}$

$\rightarrow |x_1| = |x_2| \xrightarrow{x_1x_2 \geq 0} \boxed{x_1 = x_2}$ لذا معکوس پذیر است

$\cancel{x_1^2x_2^2} - 5x_1^2 = \cancel{x_2^2x_1^2} - 5x_2^2$

۵-



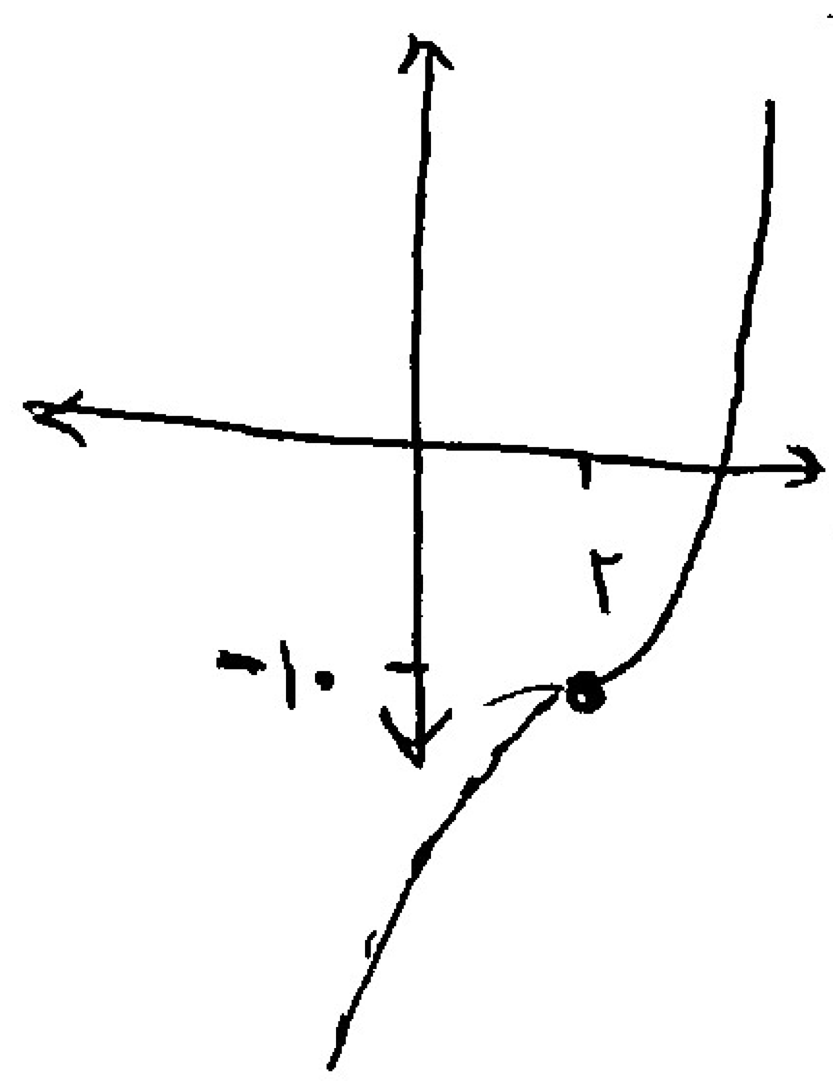
فرض کنیم $k = 0$

نمی توانند مساوی باشد

چون انتقال عمودی f_2

بیشتر از f_1 می باشد

$\boxed{k \leq -6}$



به ازای $k = -6$ تابع پیوسته

می شود و به ازای k های کوچکتر

تابع اکیداً یکنوا خواهد بود

۶-

$$f(x) = \begin{cases} 4x & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases} \qquad f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & x \geq 0 \\ \frac{x}{2} & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} (a+b)x & x \geq 0 \\ (a-b)x & x < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b = \frac{1}{4} \\ a-b = \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow[\text{دو معادله دو مجهول}]{\text{حل دستگاه}} \boxed{\begin{matrix} a = \frac{3}{8} \\ b = -\frac{1}{8} \end{matrix}}$$

۷-

$$f(2) = -10 \rightarrow \frac{6+4}{2+m} = -10 \rightarrow m = -3 \rightarrow f(x) = \frac{3x+4}{x-3} = f^{-1}(x)$$

$$y = x + \frac{3x+4}{x-3} = x \rightarrow 3x+4 = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{-4}{3}}$$ تابع با وارونش منطبق است

۸-

$$f(3-2x) = -2 = 2 - g\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow g\left(\frac{x}{2}\right) = 4 \xrightarrow{\text{اعمال } g^{-1}} \frac{x}{2} = g^{-1}(4)$$

$$g\left(\frac{x}{2}\right) = 2 - f(3-2x) = 4 \rightarrow -2 = f(3-2x) \xrightarrow{\text{اعمال } f^{-1}} f^{-1}(-2) = 3-2x$$

$$4g^{-1}(4) + f^{-1}(-2) = \underbrace{\cancel{4\left(\frac{x}{2}\right)}}_{2x} + 3 - 2x = \boxed{3}$$

۹-

$x \rightarrow -x$

$y \rightarrow -y$

$x \rightarrow x-2$

$y \rightarrow y-3$

$$y = \frac{+5x+13}{1+x} \rightarrow y = \frac{5(x-2)+13}{\underbrace{\cancel{1+x-2}}_{x-1}} - 3$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{2x+6}{x-1} \qquad f^{-1}(x) = \frac{x+6}{x-2}$$

$$\xrightarrow{f = f^{-1}} \frac{2x+6}{x-1} = \frac{x+6}{x-2} \rightarrow x^2 + 5x - 6 = 2x^2 + 2x - 12 \rightarrow 0 = x^2 - 3x - 6$$

$$-\frac{b}{a} = \alpha + \beta = S = \boxed{3}$$

۱۰-

$$[y] = [x + 4[x]] \rightarrow [y] = 5[x] \rightarrow y = x + 4 \times \frac{[y]}{5}$$

$$x = y - \frac{4[y]}{5} \xrightarrow[y \text{ و } x]{\text{عوض کردن}} y = x - \frac{4[x]}{5} = f^{-1}(x)$$

$$fog(x) = \cancel{x} + 4[x] - \cancel{x} + \frac{4[x]}{5} = \frac{24[x]}{5}$$