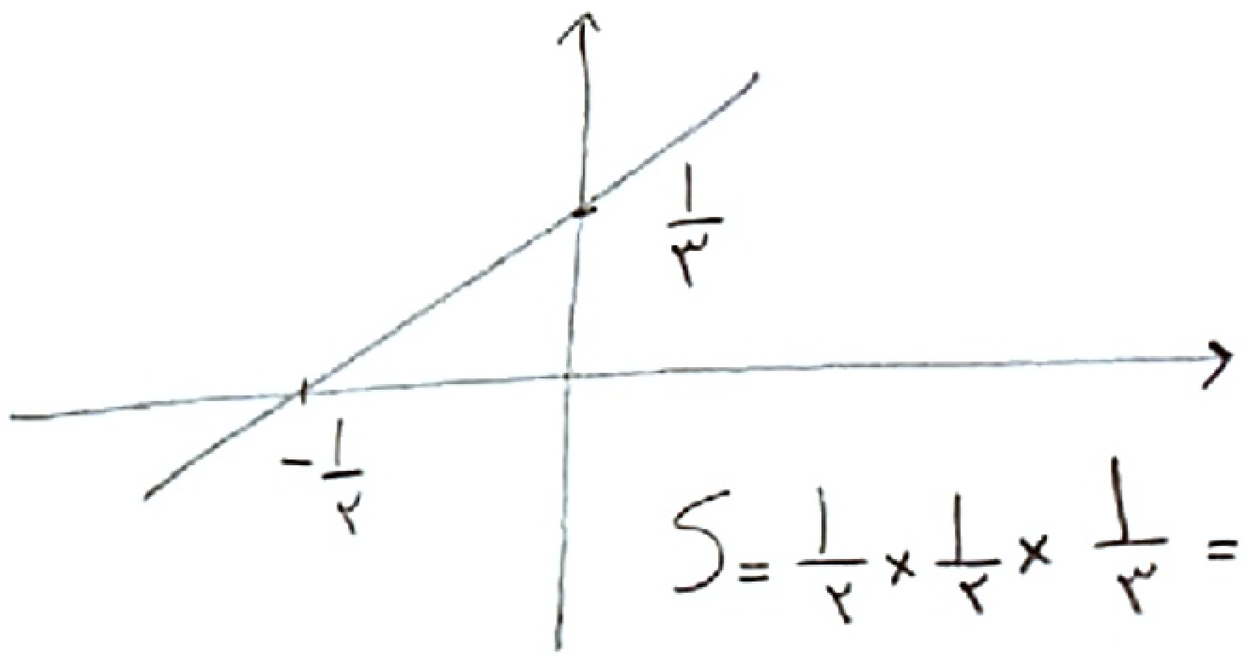
نام و نام خانوادگی ...... عرفان عبداللهی ...... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ۱۰ کلاس دوازدهم پسر A

۱

$2y = 3x - 1 \longrightarrow$ وارون تابع : $2x = 3y - 1 \to 2x + 1 = 3y$

$\dfrac{2x+1}{3} = y$



$x = 0 \to y = \frac{1}{3}$

$y = 0 \to 2x + 1 = 0 \to x = -\frac{1}{2}$

$S = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

۲

الف) $y = x^2 - 2x + 3 \qquad x_s = \dfrac{-(-2)}{2(1)} = 1 \quad , \quad x \in [1, +\infty)$

تابع یک به یک است.

$y = (x-1)^2 + 2 \longrightarrow y - 2 = (x-1)^2 \to \sqrt{y-2} = x - 1 \to x = 1 + \sqrt{y-2}$

$f(x)^{-1} = 1 + \sqrt{x-2} \quad , \quad Df^{-1} = Rf = [2, +\infty)$

ب) $y = x^2 - 2x + 3 \qquad x_s = 1 \quad , \quad x \in [3, +\infty)$ با توجه به شکل تابع یک به یک است.

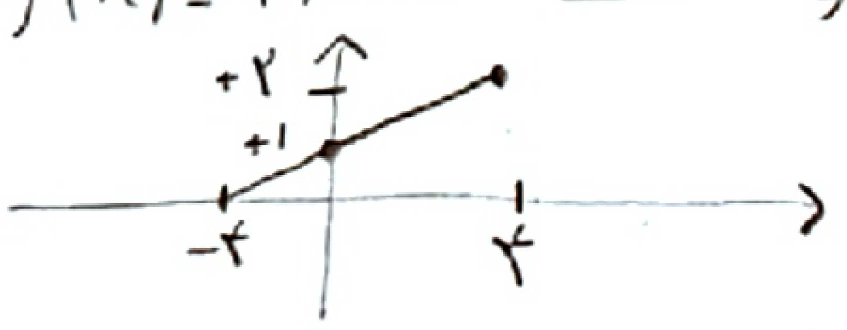
$f(x)^{-1} = 1 + \sqrt{x-2} \quad , \quad Df^{-1} = Rf = [6, +\infty)$ وارون تابع با وارون تابع در قسمت الف یکسان است.

۳

$f(x) = 2x - \sqrt{16 - 4x(4-x)} = 2x - \sqrt{16 - 16x + 4x^2} = 2x - \sqrt{(2x-4)^2}$

$= 2x - |2x - 4| \longrightarrow \begin{cases} 4 & x \geq 2 \to \text{وارون ناپذیر} \\ 4x - 4 & x \leq 2 \to \text{وارون پذیر} \end{cases}$

$f(x) = 4x - 4 \longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 1 \quad , \quad x \in Df^{-1} = Rf = (-\infty, 4]$



$S = \frac{1}{2}(2+1) \times 4 = 6$

۴

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 8}} \qquad f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow x_1 = x_2$

$\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 8}} = \dfrac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - 8}} \to \dfrac{x_1^2}{x_1^2 - 8} = \dfrac{x_2^2}{x_2^2 - 8} \to x_1^2 x_2^2 - 8x_1^2 = x_2^2 x_1^2 - 8x_2^2$

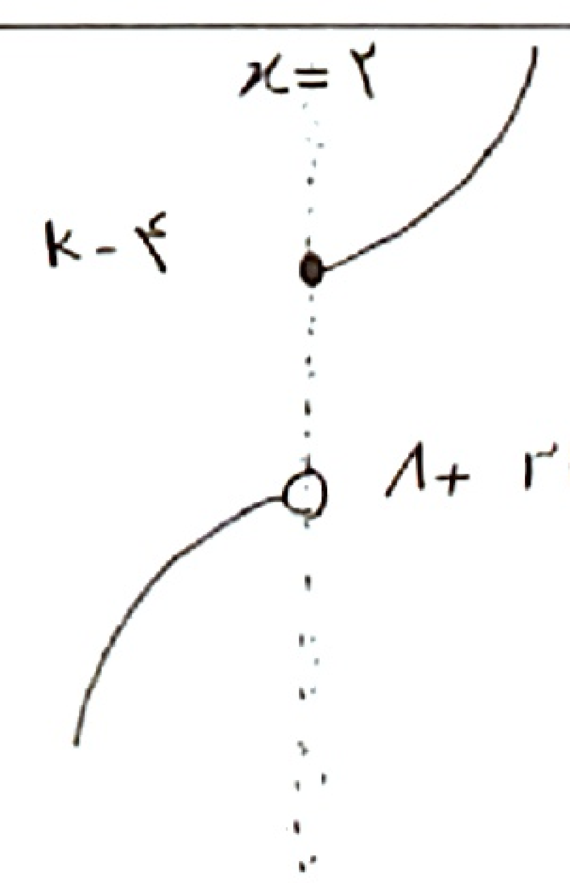
$x_1^2 = x_2^2 \longrightarrow x_1 = \pm x_2 \longrightarrow$ x_2 , x_1 هم علامت هستند $\longrightarrow x_1 = x_2$

تابع وارون پذیر است

$y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 8}} \longrightarrow y^2 = \dfrac{x^2}{x^2 - 8} \longrightarrow x^2 = \dfrac{8y^2}{y^2 - 1} \to x = \pm \dfrac{\sqrt{8}\, y}{\sqrt{y^2 - 1}} \to f(x)^{-1} = \dfrac{\sqrt{8}\, x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

۵

$g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + k & x \geq 2 \\ -x^2 + 6x + 3k & x < 2 \end{cases}$



$f(2) = 4 - 8 + k = k - 4$

$x_{s_1} = \dfrac{-(-4)}{2} = 2 \longrightarrow 8 + 3k \leq k - 4$

$2k \leq -12$

$x_{s_2} = \dfrac{-(6)}{-2} = 3 \qquad k \leq -6$

$f(x)=3x+\|x\| \rightarrow f(x)\begin{cases}4x & ; x\geq 0\\ 2x & ; x<0\end{cases} \quad f^{-1}(x)\begin{cases}\frac{1}{4}x & ; x\geq 0\\ \frac{1}{2}x & ; x<0\end{cases}$ $f^{-1}(x)=g(x)=ax+b\|x\| \quad \begin{cases}(a+b)x & x\geq 0 \rightarrow a+b=\frac{1}{4}\\ (a-b)x & x<0 \rightarrow a-b=\frac{1}{2}\end{cases} \rightarrow 2a=\frac{3}{4}, \quad a=\frac{3}{8}, \quad b=-\frac{1}{8}$ $a\cdot b=-\frac{1}{8}\times\frac{3}{8}=-\frac{3}{64}$	۶
$f(x)=\frac{3x+4}{x+m} \longrightarrow f(2)=-10 \rightarrow \frac{3(2)+4}{2+m}=-10 \rightarrow -20-10m=10, \quad -10m=30, \quad m=-3$ $f(x)=\frac{\overset{a}{3}x+4}{x\underset{d}{-3}} \rightarrow f^{-1}(x)=f(x) \qquad y=f\circ f^{-1}(x)+f^{-1}(x)$ $a+d=0$ $y=x+f(x)=x+\frac{3x+4}{x-3}$ $x\in D_{f^{-1}}=R_f=R-\{3\} \rightarrow x=x+f(x)\rightarrow f(x)=0$ $\frac{3x+4}{x-3}=0 \longrightarrow 3x+4=0 \longrightarrow x=-\frac{4}{3}$	۷
$\underbrace{4g^{-1}(4)}_{a}+\underbrace{f^{-1}(-2)}_{b}=4(a)+(b)=3 \qquad g(a)=4, f(b)=-2$ $f(3-2x)=2-g\left(\frac{x}{2}\right)\rightarrow f(b)=2-g(b)\rightarrow -2=2-4\rightarrow -2=-2$ $3-2x=b\rightarrow \frac{3-b}{2}=x \longrightarrow x=x\rightarrow 2a=\frac{3-b}{2}\rightarrow 4a=3-b$ $\frac{x}{2}=a\rightarrow x=2a \qquad 4g^{-1}(4)+f^{-1}(-2)=4a+b=3 \quad 4a+b=3$	۸
$y=\frac{5x-13}{1-x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبداء}} -\frac{5(-x)-13}{1-(-x)}=\frac{5x+13}{1+x} \xrightarrow[\text{۲ واحد به راست}]{} \frac{5(x-2)+13}{1+(x-2)}$ $=\frac{5x+3}{x-1} \xrightarrow{\text{سه واحد به پایین}} \frac{5x+3}{x-1}-3=\frac{2x+6}{x-1}\rightarrow f(x)=\frac{2x+6}{x-1}$ $f^{-1}(x)=\frac{x+6}{x-2} \rightarrow f^{-1}(x)=f(x) \rightarrow \frac{x+6}{x-2}=\frac{2x+6}{x-1}$ $x^2+5x-6=2x^2+2x-12 \longrightarrow x^2-3x-6=0 \qquad S=\frac{-(-3)}{1}=3$	۹
$f(x)=x+4[x] \longrightarrow f^{-1}(x)\rightarrow x=y+4[y]\rightarrow [x]=[y+4[y]]$ $[x]=5[y] \rightarrow \frac{1}{5}[x]=[y] \qquad x=y+4\left(\frac{1}{5}[x]\right)\rightarrow y=x-\frac{4}{5}[x]$ $f^{-1}(x)=g(x)=x-\frac{4}{5}[x] \qquad D(f-g)=D_f\cap D_g ; D_f=R, D_g=D_{f^{-1}}=R_f$ $(f-g)(x)=x+4[x]-\left(x-\frac{4}{5}[x]\right)=\frac{24}{5}[x]$	۱۰