

۱- تابع $f(x) = x + [x]$ را در نظر بگیرید به سوالات زیر پاسخ دهید:
الف) تابع f و f^{-1} چقدر بار همسری را قطع می کنند.

ب) معادله $f \circ f^{-1}(x) = 2x - \frac{3}{4}$ را حل کنید. (۲)

اگر $y = x + [x] \xrightarrow{\text{تبدیل}} x = y + [y] \xrightarrow{*} x = y + \frac{[x]}{2} \rightarrow y = x - \frac{[x]}{2} = f^{-1}(x)$
 $[x] = [y + [y]] \rightarrow [x] = 2[y] \rightarrow [y] = \frac{[x]}{2} *$
 $f^{-1}(x) = f(x) \rightarrow x - \frac{[x]}{2} = x + [x] \rightarrow \frac{3}{2}[x] = 0 \rightarrow [x] = 0 \rightarrow x = [0] \checkmark$ نقطه

$f \circ f^{-1}(x) = x - 2x - \frac{3}{4} \rightarrow x = \frac{3}{4}$ نقطه

$x \in D_{f^{-1}} = R_f = [0, 1) \cup [2, 3) \cup \dots$
 $0 \leq x < 1 \quad 1 \leq x < 2$

بنابراین $\frac{3}{4}$ جزء دامنه $D_{f^{-1}}$ یا همان R_f نیست! ✓

۲- اگر حاصل برخورد مجانب افقی و مجانب قائم تابع همگرا نباشد

روی نیمه راست $y = \frac{ax+3}{4x+b}$ می باشد حاصل $f \circ f^{-1}(5-\sqrt{4})$

از دست آورده $\frac{a}{4} = \frac{-b}{4} \rightarrow a = -b$ نقطه

$f(x) = \frac{ax+3}{4x-a} \rightarrow f \circ f^{-1}(x) = \frac{a(\frac{ax+3}{4x-a})+3}{4(\frac{ax+3}{4x-a})-a} = \frac{a^2x+3a+12x-3a}{4ax+12-4ax+a^2} = \frac{a^2x+12x}{12+a^2} = x \Rightarrow f \circ f^{-1}(5-\sqrt{4}) = 5-\sqrt{4} \checkmark$ (۲)

پروہام شریعی

$$g(x) = 2f(3x) - 1$$

۵- f تابعی وارن پذیر است و

اگر $g^{-1}(x) = a f^{-1}\left(\frac{x+b}{c}\right) + d$ باشد حاصل $\frac{ac+d}{2b}$ را بنویسید

$$g(x) = K \rightarrow g^{-1}(K) = x$$

(۲)

$$K = 2f(3x) - 1 \rightarrow \frac{K+1}{2} = f(3x) \rightarrow f^{-1}\left(\frac{K+1}{2}\right) = 3x \rightarrow \frac{f^{-1}\left(\frac{K+1}{2}\right)}{3} = x$$

$$\begin{cases} x = g^{-1}(K) \\ x = \frac{f^{-1}\left(\frac{K+1}{2}\right)}{3} \end{cases} \Rightarrow g^{-1}(K) = \frac{1}{3} f^{-1}\left(\frac{K+1}{2}\right) \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1}{3} f^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

$$a = \frac{1}{3}, b = 1, c = 2, d = 0$$

$$\frac{ac+d}{2b} = \frac{\frac{1}{3} \times 2 + 0}{2 \times 1} = \frac{1}{3} \checkmark$$

۶- منابع وارن تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ را با ذکر دامنه وارن بنویسید

(۲)

$$f(x) = x + 2\sqrt{x} \xrightarrow{\text{دارد}} y = x + 2\sqrt{x} = x + 2\sqrt{x+1-1} = (\sqrt{x+1})^2 - 1$$

$$x \geq 0$$

$$\rightarrow y+1 = (\sqrt{x+1})^2 \rightarrow \sqrt{y+1} = \sqrt{x+1} \rightarrow \sqrt{y+1} = \sqrt{x+1} \rightarrow \sqrt{y+1} - 1 = \sqrt{x}$$

نشان

$$y+1-1-2\sqrt{y+1} = x$$

$$\rightarrow f^{-1}(y) = x + 2 - 2\sqrt{y+1}$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = [0, \infty)$$

زیرا عبارت $\sqrt{x+1}$ نمی تواند منفی باشد.

$$D_f = [0, +\infty) \rightarrow R_f = [0, +\infty)$$

پروهام شرعی

۷- تابع $y = \underbrace{x-1}_{\text{اکیلا معرری}} + \underbrace{2^x}_{\text{اکیلا معرری}}$ وارون خود را در چند نقطه قطع می کند؟

$$\Rightarrow x-1+2^x = x \rightarrow 2^x = 1 \rightarrow \log_2 1 = \log_2 2^0 \rightarrow x=0$$

کلیت تابع اکیلا معرری (۲) ✓ یک نقطه

چون تابع اکیلا معرری است بنابراین وارون خود را فقط در یک نقطه از ناحیه اول رسم قطع می کند. پس کاغذ است محل برخورد تابع را با شیب از ناحیه اول رسم $(y=x)$ درست آوردم.

۸- تابع $f(x) = x^3 + 4x$ مفروض است. دامنه تابع

$y = \sqrt{f^{-1}(x) - x}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟ (۲)

$$y = \sqrt{f^{-1}(x) - x} \rightarrow f^{-1}(x) - x \geq 0 \rightarrow f^{-1}(x) \geq x \Rightarrow f(x) \leq x$$

$$\left. \begin{aligned} x^3 + 4x \leq x &\rightarrow x^3 + 3x \leq 0 \rightarrow x(x^2 + 3) \leq 0 \\ x^2 + 3 &\text{ همواره مثبت است} \end{aligned} \right\} \rightarrow x \leq 0$$

✓ $D_y = (-\infty, 0]$

دامنه y شامل یک عدد صحیح نامنفی یعنی $x=0$ است. ✓

$$f^{-1}(x) \geq x \rightarrow f(f^{-1}(x)) \geq f(x) \rightarrow x \geq f(x)$$

چون $f(x)$ اکیلا معرری است

x^3 اکیلا معرری و $4x$ اکیلا معرری

بنابراین جمع آنها اکیلا معرری است.

پرهام مشرعی

۴- تابع $x \geq -3$ و $f(x) = -x + \sqrt{x+4}$ ابتدا شیب:

نیساز خاصه اهل و سولم قرینه می کشیم پس x واحد به چپ انتقال می دهیم

و آن $g(x)$ می نامیم. مقدار تابع g با $y = x - 4$ حین بار جفتند داریم

$$f(x) = -x + \sqrt{x+4} \rightarrow y = -(x - \sqrt{x+4}) \rightarrow y = -(x+4 - \sqrt{x+4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4})$$

$$\rightarrow y = -((\sqrt{x+4} - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4}) \rightarrow y + \frac{1}{4} = (\sqrt{x+4} - \frac{1}{4})^2 \rightarrow \sqrt{-y + \frac{1}{4}} = \sqrt{x+4} - \frac{1}{4}$$

$$x \geq -3 \Rightarrow \sqrt{x+4} - \frac{1}{4} \geq 0 \rightarrow \sqrt{x+4} - \frac{1}{4} = \sqrt{-y + \frac{1}{4}} \rightarrow \sqrt{x+4} = \sqrt{-y + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow x+4 = -y + \frac{1}{4} + \sqrt{-y + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \rightarrow x = -y + \frac{1}{4} + \sqrt{-y + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} - 4 \rightarrow f(x) = -x + \sqrt{x+4} = \frac{1}{4} - \sqrt{-y + \frac{1}{4}}$$

$$\rightarrow -(x+4) + \sqrt{-(x+4) + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4} = -x + \sqrt{-x - \frac{11}{4}} - \frac{11}{4} = g(x) \rightarrow -x + \sqrt{-x - \frac{11}{4}} - \frac{11}{4} = x - 3$$

$$\sqrt{-x - \frac{11}{4}} = 2x + \frac{11}{4} \rightarrow -x - \frac{11}{4} = 4x^2 + \frac{11}{2}x + \frac{121}{16} \rightarrow 4x^2 + 15x + 15 = 0$$

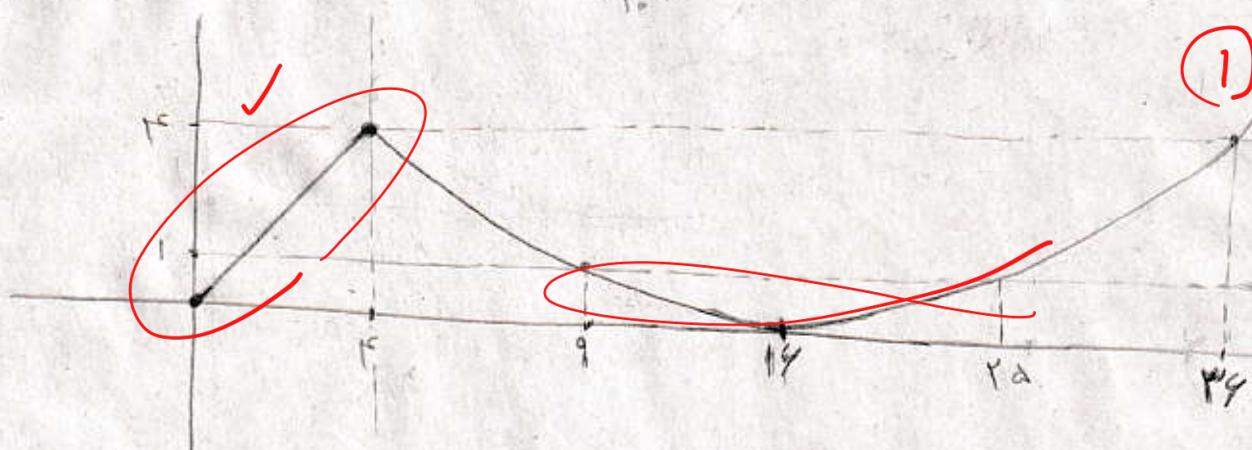
جواب صفحه بعد...

$$\Delta = 225 - 4 \times 15 \times 15 = -15$$

۱- تابع $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ را دایره بگیرد و $f \circ f(x)$ را رسم کند.

$$\sqrt{y} + \sqrt{x} = 2 \rightarrow \sqrt{y} = 2 - \sqrt{x} \rightarrow y = (2 - \sqrt{x})^2$$

$$f \circ f(x) = \left(2 - \sqrt{(2 - \sqrt{x})^2}\right)^2 = (2 - |2 - \sqrt{x}|)^2$$



$$\sqrt{y} = 2 - \sqrt{x} \geq 0 \rightarrow 0 \leq x \leq 4$$

به دامنه توجه کن!

+225

$$\xrightarrow[\text{به تفصیل}]{\text{قرینه نسبت}} f^{-1}(n) \xrightarrow[\text{به چپ}]{\text{۴ واحد}} f^{-1}(n+4)$$

۹

$$g(n) = f^{-1}(n+4) = n-3 \xrightarrow[\text{به راست}]{\text{از دو طرف}} f \circ f^{-1}(n+4) = f(n-3)$$

$$n+4 = -(n-3) + \sqrt{n+1} \rightarrow 2n+1 = \sqrt{n+1} \quad \underline{\text{توان ۲}}$$

$$4n^2 + 3n = 0 \rightarrow \begin{cases} n=0 \\ n=-\frac{3}{4} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{جواب رادیکال} \\ \text{رو منفرجه میانه} \end{array}$$