

پرهام شریعی

۱- تابع $f(x) = x + [x]$ را در نظر بگیرید به سوالات زیر پاسخ دهید:
 الف) تابع f و f^{-1} چقدر بار همسری را قطع می کنند.

ب) معادله $f \circ f^{-1}(x) = 2x - \frac{3}{4}$ را حل کنید.

الف) $y = x + [x] \xrightarrow{\text{تبدیل}} x = y + [y] \xrightarrow{*} x = y + \frac{[x]}{2} \rightarrow y = x - \frac{[x]}{2} = f^{-1}(x)$
 $[x] = [y + [y]] \rightarrow [x] = 2[y] \rightarrow [y] = \frac{[x]}{2} *$
 $f^{-1}(x) = f(x) \rightarrow x - \frac{[x]}{2} = x + [x] \rightarrow \frac{3}{2}[x] = 0 \rightarrow [x] = 0 \rightarrow x = [0] = 0$ (نقطه)

$f \circ f^{-1}(x) = x - 2x - \frac{3}{4} \rightarrow x = \frac{3}{4}$ (نقطه)

$x \in D_{f^{-1}} = R \setminus f = [0, 1) \cup [2, 3) \cup \dots$
 $0 \leq x < 1 \quad 1 \leq x < 2$

بنابراین $\frac{3}{4}$ جزء دامنه $D_{f^{-1}}$ یا همان $R \setminus f$ نیست!

۲- اگر حاصل برخورد مجانب افقی و مجانب قائم تابع همگرا نیست

روی نیمه راست $y = \frac{ax+3}{4x+b}$ می باشد حاصل $f \circ f^{-1}(5-\sqrt{4})$

اگر دست آورده $\frac{a}{4} = \frac{-b}{4} \rightarrow a = -b$ باشد $y = x$ می باشد

$$f(x) = \frac{ax+3}{4x-a} \rightarrow f \circ f^{-1}(x) = \frac{a(\frac{ax+3}{4x-a})+3}{4(\frac{ax+3}{4x-a})-a} = \frac{\frac{a^2x+3a+12x-3a}{4x-a}}{\frac{4ax+12-4ax+a}{4x-a}} = \frac{a^2x+12x}{12+a^2} = x \Rightarrow f \circ f^{-1}(5-\sqrt{4}) = 5-\sqrt{4}$$

پیرهام شریعی

$$g(x) = 2f(3x) - 1$$

۵- f تابعی وارن پذیر است و

اگر $g^{-1}(x) = a f^{-1}\left(\frac{x+b}{c}\right) + d$ باشد حاصل $\frac{ac+d}{2b}$ را بنویسید

$$g(x) = K \rightarrow g^{-1}(K) = x$$

$$K = 2f(3x) - 1 \rightarrow \frac{K+1}{2} = f(3x) \rightarrow f^{-1}\left(\frac{K+1}{2}\right) = 3x \rightarrow \frac{f^{-1}\left(\frac{K+1}{2}\right)}{3} = x$$

$$\begin{cases} x = g^{-1}(K) \\ x = \frac{f^{-1}\left(\frac{K+1}{2}\right)}{3} \end{cases} \Rightarrow g^{-1}(K) = \frac{1}{3} f^{-1}\left(\frac{K+1}{2}\right) \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1}{3} f^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

$$a = \frac{1}{3}, b = 1, c = 2, d = 0$$

$$\frac{ac+d}{2b} = \frac{\frac{1}{3} \times 2 + 0}{2 \times 1} = \frac{1}{3} \leftarrow$$

۶- منابع وارن تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ را با ذکر دامنه ی آن بدست آورید

$$f(x) = x + 2\sqrt{x} \xrightarrow{\text{دارد}} y = x + 2\sqrt{x} = x + 2\sqrt{x+1-1} = (\sqrt{x+1})^2 - 1$$

$$x \geq 0$$

$$\rightarrow y+1 = (\sqrt{x+1})^2 \rightarrow \sqrt{y+1} = \sqrt{x+1} \rightarrow \sqrt{y+1} = \sqrt{x+1} \rightarrow \sqrt{y+1} - 1 = \sqrt{x}$$

نشان

$$y+1-1-2\sqrt{y+1} = x$$

زیرا عبارت $\sqrt{x+1}$ نمی تواند منفی باشد.

$$\rightarrow f^{-1}(x) = x + 2 - 2\sqrt{x+1}$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = [0, \infty)$$

$$D_f = [0, +\infty) \rightarrow R_f = [0, +\infty)$$

پروهام شرعی

۷- تابع $y = \underbrace{x-1}_{\text{اکثراً معرری}} + \underbrace{2^x}_{\text{اکثراً معرری}}$ وارون خود را در چند نقطه قطع می کند؟

$\Rightarrow x-1+2^x = x \rightarrow 2^x = 1 \rightarrow \underbrace{2^x}_{\text{کلی تابع اکثراً معرری}} = \underbrace{1}_{\text{کلی تابع اکثراً معرری}} \rightarrow x=0$
 یک نقطه

چون تابع اکثراً معرری است بنابراین وارون خود را فقط دو بار تغییر می دهد. اول در رسم قطع می کند. پس کاغذ است محل برخورد تابع را با تغییر ناصبه اول رسم $(y=x)$ درست آوریم.

۸- تابع $f(x) = x^3 + 4x$ مفروض است. دامنه تابع

$y = \sqrt{f^{-1}(x) - x}$ شامل چند عدد نامنفی است؟

$y = \sqrt{f^{-1}(x) - x} \rightarrow f^{-1}(x) - x \geq 0 \rightarrow f^{-1}(x) \geq x \Rightarrow f(x) \leq x$
 $x^3 + 4x \leq x \rightarrow x^3 + 3x \leq 0 \rightarrow x(x^2 + 3) \leq 0$
 $\left. \begin{array}{l} x^2 + 3 \text{ همواره مثبت است} \end{array} \right\} \rightarrow x \leq 0$

$D_y = (-\infty, 0]$

دامنه y شامل یک عدد صحیح نامنفی یعنی $x=0$ است.

$f^{-1}(x) \geq x \rightarrow f(f^{-1}(x)) \geq f(x) \rightarrow x \geq f(x)$

چون $f(x)$ اکثراً معرری است

x^3 اکثراً معرری و $4x$ اکثراً معرری

بنابراین جمع آنها اکثراً معرری است.

پرهام مشرعی

۴- تابع $x \geq -3$ و $f(x) = -x + \sqrt{x+4}$ ابتدا شیب:

نیساز خاصه اعل و سول قرینه حرکت پس ۴ واحد به چپ انتقال می دهیم

و آن $g(x)$ می نامیم. مقدار تابع g با $y = x - 4$ حین بار بر جوند داریم

$$f(x) = -x + \sqrt{x+4} \rightarrow y = -(x - \sqrt{x+4}) \rightarrow y = -(x+4 - \sqrt{x+4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4})$$

$$\rightarrow y = -((\sqrt{x+4} - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4}) \rightarrow y + \frac{1}{4} = (\sqrt{x+4} - \frac{1}{4})^2 \rightarrow \pm \sqrt{y + \frac{1}{4}} = \sqrt{x+4} - \frac{1}{4}$$

$x \geq -3$

$$x \geq -3 \Rightarrow \sqrt{x+4} - \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\xrightarrow{\text{مقدار مثبت}} \sqrt{x+4} - \frac{1}{4} = \sqrt{y + \frac{1}{4}} \rightarrow \sqrt{x+4} = \sqrt{y + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow x+4 = -y + \frac{1}{4} + \sqrt{-y + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \rightarrow x = -y + \frac{1}{4} + \sqrt{-y + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} - 4 \rightarrow f(x) = -x + \sqrt{x+4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{مقدار مثبت}} -(x+4) + \sqrt{-(x+4) + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4} = -x + \sqrt{-x - \frac{11}{4}} - \frac{11}{4} = g(x) \rightarrow -x + \sqrt{-x - \frac{11}{4}} - \frac{11}{4} = x - 3$$

$$\sqrt{-x - \frac{11}{4}} = 2x + \frac{11}{4} \rightarrow -x - \frac{11}{4} = 4x^2 + \frac{11}{2}x + \frac{121}{16} \rightarrow 4x^2 + 15x + 15 = 0$$

$$\Delta = 225 - 4 \times 15 \times 15 = -15$$

در هیچ نقطه ای بر جوند نداریم

۱- تابع $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ را دایره بگیریم و $f \circ f(x)$ را رسم کنیم.

$$\sqrt{y} + \sqrt{x} = 2 \rightarrow \sqrt{y} = 2 - \sqrt{x} \rightarrow y = (2 - \sqrt{x})^2$$

$$f \circ f(x) = \left(2 - \sqrt{(2 - \sqrt{x})^2}\right)^2 = (2 - |2 - \sqrt{x}|)^2$$

$\sqrt{x} \leq 2 \rightarrow 0 \leq x \leq 4 \rightarrow (2 - 2 + \sqrt{x})^2 = x$
 $\sqrt{x} > 2 \rightarrow x > 4 \rightarrow (2 + \sqrt{x} - \sqrt{x})^2 = (4 - \sqrt{x})^2$

