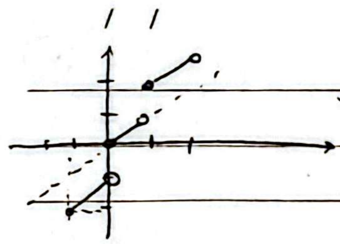
ماهان کشنی



۱) الف) تابع f را رسم می‌کنیم، همانطور که می‌بینید این تابع در بازه $[0, 1)$ خط $y=x$ را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند در نتیجه نمودار تابع وارون خودش را به علت اینکه این تابع صعودی است در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند

ب) $f \circ f^{-1}(x) = x \ (x \in D_{f^{-1}} = R_f) \Rightarrow x = 2x - \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

از روی نموداری که رسم کردیم نیز مشخص است که این تابع مقدار $\frac{3}{2}$ را نمی‌گیرد $\{2, \frac{3}{2}\}$ است نمودارش در دامنه $f \circ f^{-1}$ نیست و از این رو این معادله فاقد جواب است

۲) محل تقاطع $(-\frac{b}{2}, \frac{a}{2})$ $\Leftarrow$ مجانب افقی: $y = \frac{a}{2}$ ، مجانب قائم: $x = -\frac{b}{2}$

جواب ۴

از آنجایی که روی نمودار $y = x$ قرار دارد در نتیجه $a = -b$ است. می‌دانیم هر تابع هموگرافیک که در آن ضریب x در صورت و قرینه عدد ثابت در مخرج باشد آن تابع با وارون خود برابر است

$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow f \circ f = f \circ f^{-1}(x) = x \Rightarrow f \circ f(5 - \sqrt{6}) = f \circ f^{-1}(5 - \sqrt{6}) = \boxed{5 - \sqrt{6}}$

۳) اگر تابع هموگرافیکی داشته باشیم که در ۲ نقطه تابع وارون خود را قطع کند قطعاً این دو نقطه روی نیم‌ساز ناحیه اول و سوم می‌باشند (زیرا هر تابع هموگرافیک از ۲ ناحیه اکیداً یکنوا تشکیل شده). از آنجایی که ضریب x در مخرج ۱ است پس این تابع دارای ۲ شاخه نزولی است

$f(x) = x \rightarrow \frac{mx + 3}{x + m + 3} = x \rightarrow mx + 3 = x^2 + mx + 3x \rightarrow x^2 + 3x - 3 = 0$

$S = \alpha + \beta = -3 , P = \alpha\beta = -3 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-3}{-3} = \boxed{1}$

۴) $g(x) = 2f(3x) - 1 = y \Rightarrow 2f(3x) - 1 = y \Rightarrow f(3x) = \frac{y+1}{2} \rightarrow f^{-1}(\frac{y+1}{2}) = 3x$

$g(x) = y \rightarrow g^{-1}(y) = x \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1}{3} f^{-1}(\frac{x+1}{2}) + 0$

$\Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = 1, c = 2, d = 0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{3} \times 2 + 0}{2} = \boxed{\frac{1}{3}}$

۶) تابع f اکیداً صعودی است پس برای بدست آوردن برد ابتدا و انتهای دامنه را در آن قرار می‌دهیم
$f(x) = x + 2\sqrt{x}$

$R_f = [0, +\infty) = D_{f^{-1}}$

$\Rightarrow y = x + 2\sqrt{x} + 1 - 1 \Rightarrow y = (\sqrt{x} + 1)^2 - 1 \rightarrow y + 1 = (\sqrt{x} + 1)^2 \rightarrow \sqrt{y+1} = \sqrt{x} + 1$

$\rightarrow \sqrt{y+1} - 1 = \sqrt{x} \rightarrow (\sqrt{y+1} - 1)^2 = x \rightarrow f^{-1}(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^2 \ (x \geq 0)$

ماکان کجوری

/ /

۷) می‌دانیم تابع y حاصل جمع دو تابع اکیداً صعودی یعنی $x-1$ و 2^x است بنابراین خودش نیز تابع اکیداً صعودی است بنابراین محل تقاطع این تابع با وارون خود بر روی خط $y=x$ قرار می‌گیرد

$f(x)=f^{-1}(x) \to f(x)=x \to 2^x+x-1=x \to 2^x=1 \to x=0$

پس دارای ۱ نقطه تقاطع است

۸) تابع f حاصل جمع دو تابع اکیداً صعودی یعنی x^3 و $4x$ است پس خود نیز تابعی اکیداً صعودی می‌باشد

$f^{-1}(x)-x\geq 0 \to f^{-1}(x)\geq x \to f\circ f^{-1}(x)\geq f(x) \to x\geq f(x)$

$\Rightarrow x\geq x^3+4x \Rightarrow x^3+3x\leq 0 \to x(x^2+3)\leq 0 \to$ − 0 +

$\Rightarrow \boxed{D_y=(-\infty,0]}$

۹) ابتدا ضابطه تابع وارون را می‌نویسیم

$f(x)=y=-x-4+\sqrt{x+4}-\frac{1}{4}+\frac{17}{4}=-(x+4-\sqrt{x+4}+\frac{1}{4})+\frac{17}{4}$

$\to f(x)=y=-(\sqrt{x+4}-\frac{1}{2})^2+\frac{17}{4}$

البته برد تابع f نیز از اینجا بدست می‌آوریم، چون تابع f دارای ماکزیمم است پس $x=-3$ را به آن می‌دهیم و مقدار برد را بدست می‌آوریم $R_f=[4,+\infty)$

$\to x=-(\sqrt{y+4}-\frac{1}{2})^2+\frac{17}{4} \to \frac{17}{4}-x=(\sqrt{y+4}-\frac{1}{2})^2$

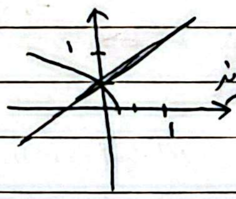
$\to \sqrt{\frac{17}{4}-x}=\sqrt{y+4}-\frac{1}{2} \to \sqrt{\frac{17}{4}-x}+\frac{1}{2}=\sqrt{y+4} \to (\sqrt{\frac{17}{4}-x}+\frac{1}{2})^2-4=y$

$x \to x+4 \Rightarrow (\sqrt{\frac{17}{4}-x-4}+\frac{1}{2})^2-4=(\sqrt{\frac{1}{4}-x}+\frac{1}{2})^2-4=g(x)$

$x\geq 4 \Rightarrow x+4\geq 4 \Rightarrow x\geq 0 \Rightarrow D_g=[0,+\infty)$

$(\sqrt{\frac{1}{4}-x}+\frac{1}{2})^2-4=x-3 \Rightarrow (\frac{1}{4}-x)+\sqrt{\frac{1}{4}-x}+\frac{1}{4}=x+1$

$\to \sqrt{\frac{1}{4}-x}=2x+0/5 \Rightarrow$



تقاطع‌شان نقطه $(0,\frac{1}{2})$ بنابراین دارای ۱ نقطه تقاطع‌اند

۱۰) این تابع با وارون خود برابر است زیرا در صورت تغییر جای x و y در ضابطه همان ضابطه است، پس:

$D_f=R_f=[0,4] \qquad f(x)=f^{-1}(x) \Rightarrow f\circ f(x)=f\circ f^{-1}(x) \qquad D_{f^{-1}}=R_f=[0,4]$

$f\circ f^{-1}(x)=x \quad (x\in[0,2])$