آزاد آزادنیا — تکلیف شماره ۱۱ — گروه دوازدهم ریاضی A

19,5

① (1,5) تابع $f(x)=x+[x]$ در بازه $[0,1)$ به صورت $y=x$ بوده پس خط نیمساز نقاط معکوس را قطع می‌کند. (الف)

ب) $f\circ f^{-1}(x)=2x-\frac{3}{2} \Rightarrow x=2x-\frac{3}{2} \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

برد تابع f از هر عدد زوج تا عدد فرد بعدی است یعنی $\frac{3}{2}=x$ غلط می‌باشد و جواب تهی است!

② (2) $y=\frac{ax+3}{4x+b} \Rightarrow$ $\frac{a}{4}$ = مجانب افقی و $\frac{-b}{4}$ = مجانب عمودی، که مجانب عمودی = مجانب افقی $\Rightarrow \frac{a}{4}=-\frac{b}{4}$

$\Rightarrow a=-b \Rightarrow y=\frac{ax+3}{4x-a} \Rightarrow f(x)=f^{-1}(x) \Rightarrow f\circ f(x)=f\circ f^{-1}(x)=x \Rightarrow f(f(5-\sqrt{6}))=5-\sqrt{6}$

③ (2) $f(x)=\frac{mx+3}{x+m+3} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{(-m-3)x+3}{x-m}$, $\frac{mx+3}{x+m+3}=\frac{(-m-3)x+3}{x-m}$

$\Rightarrow -(m+3)x^2+3x-(m+3)^2x+3(m+3)=mx^2+3x-m^2x-3m \Rightarrow -mx^2-3x^2+3x-m^2x-6mx$

$-9x+3m+9=mx^2+3x-mx^2-3m \Rightarrow -2mx^2-3x^2-9x-6mx+3m+9+3m$

$\Rightarrow (-2m-3)x^2-(9+6m)x+6m+9 \Rightarrow \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \Rightarrow \frac{S}{P}=\frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{-b}{c}=\frac{9+6m}{6m+9}=1$

④ (2) $f(x)=\sqrt{(2x+5)^2}-\sqrt{(5x-2)^2}=|2x+5|-|5x-2| \Rightarrow$

$x<\frac{-5}{2}$	$\frac{-5}{2}\le x<\frac{2}{5}$	$x\ge\frac{2}{5}$
$-2x-5+5x-2$	$2x+5x+5-2$	$2x+5-5x+2$
$3x-7$	$7x+3$	$7-3x$

$[\frac{2}{5},+\infty)$ نزولی است $\Rightarrow y=-3x+7 \Rightarrow$ نزولی $f(x)=-3x+7 \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{7-x}{3} \Rightarrow D_{f^{-1}}=R_f=(-\infty,\frac{29}{5}]$

⑤ (2) $g(x)=2f(3x)-1$, $g^{-1}(x)=af^{-1}(\frac{x+b}{c})+d$

$g(x)=t \Rightarrow 2f(3x)-1=t \Rightarrow f^{-1}(\frac{t+1}{2})=3x \Rightarrow x=\frac{f^{-1}(\frac{x+1}{2})}{3}$

$\Rightarrow g^{-1}(t)=\frac{1}{3}f^{-1}(\frac{x+1}{2}) \Rightarrow a=\frac{1}{3}, b=1, c=2, d=0 \Rightarrow \frac{ac+d}{2b}=\frac{\frac{2}{3}+0}{2}=\frac{1}{3}$

⑥ (2) $f(x)=x+2\sqrt{x} \Rightarrow D_f=[0,+\infty)$, $R_f=[0,+\infty)$

$f(x)=x+2\sqrt{x} \xrightarrow{\text{به علاوه و منهای ۱}} f(x)=x+2\sqrt{x}+1-1 \Rightarrow f(x)+1=x+2\sqrt{x}+1 \Rightarrow f(x)+1=(\sqrt{x}+1)^2$

$\Rightarrow \pm\sqrt{f(x)+1}-1=\sqrt{x} \Rightarrow f(x)+1+1-2\sqrt{f(x)+1}=x \Rightarrow f^{-1}(x)=x+2-2\sqrt{x+1} \Rightarrow D_{f^{-1}}=R_f=[0,+\infty)$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=x-2\sqrt{x+1}+2$

۷

صعودی اکید　　صعودی اکید

$y=x-1+2^{x}$

۷) تابع اکیداً صعودی بوده، پس خودش و معکوسش در ناحیه ربع اول و سوم متقاطع‌اند. $y=x$ و ...

$\Rightarrow x-1+2^{x}=x \Rightarrow 2^{x}=1 \Rightarrow x=0$ و $y=0$ در یک نقطه

۲

---

۸) ۲

$f(x)=x^3+4x$ ، $y=\sqrt{f^{-1}(x)-x} \Rightarrow D_y: f^{-1}(x)\ge x \Rightarrow x\ge f(x)$

x^3+4x صعودی اکید است $\Rightarrow f\circ f^{-1}(x)=x$　　f می‌گیریم

اکید صعودی　اکید صعودی

$\begin{cases} x\ge x^3+4x \Rightarrow x^3+3x\le 0 \\ x(x^2+3)\le 0 \end{cases}$

همواره نامنفی است، پس فقط صفر در دامنه صدق می‌کند.

---

۹) ۲

$f(x)=-x+\sqrt{x+4}$ ، $x\ge -3$

$x=-y+\sqrt{y+4} \Rightarrow x+y=\sqrt{y+4} \Rightarrow (x+y)^2-y-4 \Rightarrow x^2+2xy+y^2-y-4=0$

$\Rightarrow y^2+(2x-1)y+(x^2-4)=0 \Rightarrow y=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{1-2x\pm\sqrt{(2x-1)^2-4(x^2-4)}}{2}$ ، $\frac{1-2x\pm\sqrt{17-4x}}{2}$

$\Rightarrow g(x)=\frac{-2(x+4)+1+\sqrt{17-4(x+4)}}{2} \Rightarrow g(x)=\frac{-2x-7+\sqrt{1-4x}}{2}$

نقطه برخورد

$g(x)=x-3 \Rightarrow \frac{-2x-7+\sqrt{1-4x}}{2}=x-3 \Rightarrow -2x-7+\sqrt{1-4x}=2x-6 \Rightarrow \sqrt{1-4x}=4x+1 \Rightarrow x=0$ با نقطه برخورد

---

۱۰) ۲

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \Rightarrow f^{-1}(x): \sqrt{y}+\sqrt{x}=2 \Rightarrow f^{-1}(x)=f(x) \Rightarrow f\circ f(x)=f\circ f^{-1}(x)$

$\Rightarrow R_f=D_{f^{-1}} \Rightarrow R_f=[0,4] \Rightarrow D_{f^{-1}}=[0,4]$