

برهان ضربی

۱- اگر $\frac{a \sin \frac{7\pi}{12} + b \cos \frac{7\pi}{12}}{a \sin \frac{11\pi}{12} + b \cos \frac{11\pi}{12}} = \tan \frac{4\pi}{12}$ باشد که ساده حاصل $\frac{b}{a}$ درست آورید.

$$\frac{a \sin \frac{7\pi}{12} + b \cos \frac{7\pi}{12}}{a \sin \frac{11\pi}{12} + b \cos \frac{11\pi}{12}} = \tan \frac{4\pi}{12} \rightarrow \frac{-\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2}}{-\frac{a}{2} + \frac{b}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{1} \rightarrow \frac{-\sqrt{3}(a+b)}{b-a} = -\frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$\rightarrow 3(a+b) = b-a$$

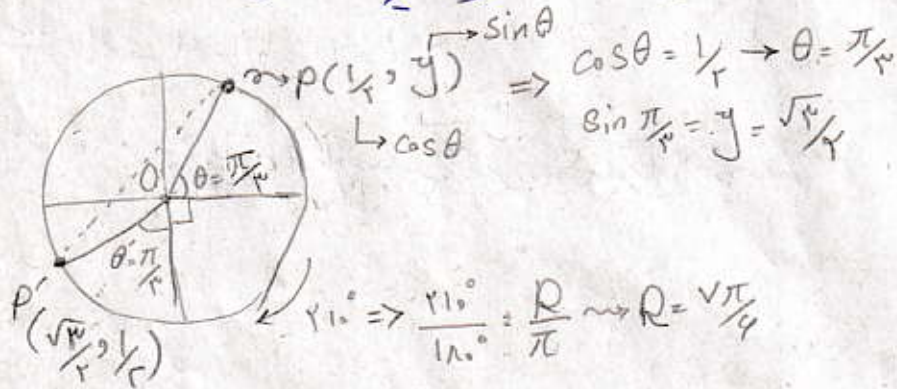
$$4a = -2b \rightarrow \frac{b}{a} = -2$$

$$\begin{cases} a \sin(\frac{7\pi}{12}) = a \sin(\pi + \frac{5\pi}{12}) = -a \sin \frac{5\pi}{12} = -\frac{a\sqrt{3}}{2} \\ a \sin(\frac{11\pi}{12}) = a \sin(2\pi - \frac{\pi}{12}) = -a \sin \frac{\pi}{12} = -\frac{a}{2} \\ b \cos(\frac{7\pi}{12}) = b \cos(\pi + \frac{5\pi}{12}) = -b \cos \frac{5\pi}{12} = -\frac{b\sqrt{3}}{2} \\ b \cos(\frac{11\pi}{12}) = \frac{b}{2} \\ \tan(\frac{4\pi}{12}) = \tan(\pi - \frac{8\pi}{12}) = -\tan(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{1} \end{cases}$$

۲- اگر نقطه $P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ را روی دایره ی مثلثاتی 210° درم خلاف



جست دایره ی مثلثاتی دوران دهیم به نقطه ی P' مرسم.
مسافت مثلث OPP' را بدست آورید. (O مرکز دایره است)



$$\text{فاصله دو نقطه } P, P' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3+1-2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\text{مسافت } OPP' = 1+1+\sqrt{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

برهام شرعی

۳- ساعت ۲ است. اگر عقرب ساعت شمار $\frac{11}{9}$ بچرخد ساعت

چند خواهد بود؟

در هر ساعت عقرب ساعت شمار $\frac{360}{12} = \frac{30}{1}$ یا $\frac{11}{12} = \frac{55}{6}$ می‌گردد پس

ساعت ۱	$\frac{11}{4}$
?	$\frac{11}{9}$

ساعت ۴۰ و ۲۰ می‌شود $\Rightarrow$ دقیقه ۴۰ = $\frac{2}{3} \times 60 = \frac{2}{3} \times 90 = 60$ ساعت $\frac{2}{3} = ?$

۴- ساعت ۳ است. بعد از گذشت چند دقیقه زاویه بین دو عقرب ساعت شمار و دقیقه شمار برای بار دوم ۲۰ درجه خواهد شد؟

$$\alpha = \left| \frac{11}{2} M - 90 H \right| \rightarrow 20 = \left| \frac{11}{2} M - 90 \right|$$

دقیقه $110 = \frac{11}{2} M \rightarrow M = 20$

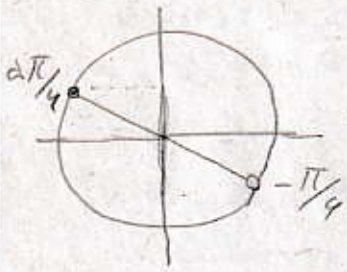
دقیقه $-70 = -\frac{11}{2} M \rightarrow M = \frac{140}{11}$

بعد از ۲۰ برای دومین بار زاویه ساعت شمار و دقیقه شمار ۲۰ درجه خواهد شد

برهان سریع

۵- اگر $-\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{5\pi}{6}$ و $\sin x = \frac{m-2}{5}$ محدوده تغییرات m شامل

چند عدد صحیح است؟



$$-\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{5\pi}{4} \rightarrow \frac{1}{5} < \sin x \leq 1 \rightarrow \frac{1}{5} < \frac{m-2}{5} \leq 1$$

$$\rightarrow -\frac{5}{4} < m-2 \leq 5 \rightarrow \frac{1}{4} < m \leq 7$$

$$\begin{aligned} & \cos 15^\circ \rightarrow \sin(90^\circ + 15^\circ) \\ & -\sin 15^\circ \rightarrow \cos(90^\circ - 15^\circ) \end{aligned}$$

۶- هرگاه $\tan 15^\circ = \frac{1}{2}$ و $\frac{\sin(105^\circ) + k \cos(255^\circ)}{\cos(165^\circ) + 2 \sin(195^\circ)} = 3$

مقدار k را بیابید.

$$\begin{aligned} & \sin(105^\circ) \rightarrow \sin(180^\circ - 75^\circ) \rightarrow \sin 75^\circ \\ & \cos(255^\circ) \rightarrow \cos(180^\circ + 75^\circ) \rightarrow -\cos 75^\circ \\ & \cos(165^\circ) \rightarrow \cos(180^\circ - 15^\circ) \rightarrow -\cos 15^\circ \\ & \sin(195^\circ) \rightarrow \sin(180^\circ + 15^\circ) \rightarrow -\sin 15^\circ \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos 15^\circ - k \sin 15^\circ}{-\cos 15^\circ - 2 \sin 15^\circ} = 3 \xrightarrow{\div \frac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}} \frac{1 - k \tan 15^\circ}{-1 - 2 \tan 15^\circ} = 3$$

$$\xrightarrow{\tan 15^\circ = \frac{1}{2}} \frac{1 - \frac{k}{2}}{-1 - 1} = 3 \rightarrow \frac{1 - \frac{k}{2}}{-2} = 3$$

$$1 - \frac{k}{2} = -6 \rightarrow -\frac{k}{2} = -7 \rightarrow k = 14$$

۷- هرگاه انتهای مکان x در ناحیه دوم و $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = 2$ باشد.

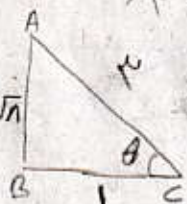
مکان شده عبارت و بر او بیاید:

$$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{r} - x\right) - \cot(\pi - x)}{\cot\left(\frac{2\pi}{r} - x\right) + 2 \tan(2\pi - x)}$$

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = 2 \rightarrow 1 - \cos x = 2 + 2 \cos x$$

$$\cos x = -\frac{1}{3}$$

$$AB^2 = 3^2 - 1^2 = 8 \rightarrow AB = \sqrt{8}$$



$$\tan x = -\sqrt{8}$$

$$\cot x = -\frac{1}{\sqrt{8}}$$

انتهای مکان x

در ناحیه دوم

مبنی $\tan$ و $\cot$ منفی هستند.

۸- محل مکان عبور $\frac{9\pi}{10}$ زاویه 108° در دایره A به محل مکان عبور به زاویه $\frac{9\pi}{10}$ از دایره B برابر است. نسبت مساحت دایره A به B کدام است؟

$$\frac{108^\circ}{180^\circ} \cdot \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{4\pi}{10}$$

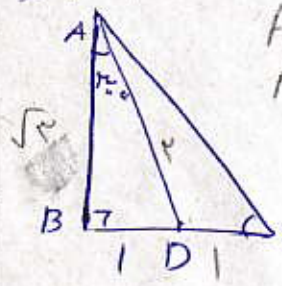
$$\alpha R_A = \alpha R_B \Rightarrow \frac{9\pi}{10} \times R_B = R_A \times \frac{9\pi}{10} \rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{3}{1}$$

$$\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^2 \propto \frac{S_A}{S_B}$$

نسبت است

بیجا م مشرعی

9- در شکل رسم شده اگر مساحت مثلث ABC برابر $\sqrt{3}$ باشد مقدار $\sin \hat{C}$ را بیابید.



$$AD \times \sin 90^\circ = BD$$

$$AD \times \frac{1}{2} = 1 \rightarrow AD = 2$$

$$AD \times \cos 90^\circ = AB$$

$$2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = AB = \sqrt{3}$$

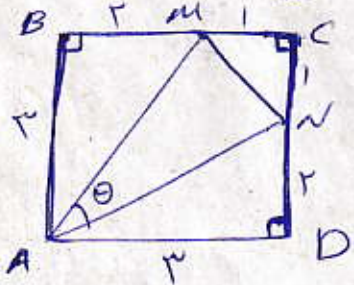
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times (1 + DC) = \sqrt{3}$$

$$\rightarrow DC = 1$$

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 = 4 + 3 = 7 \rightarrow AC = \sqrt{7}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

1- با توجه به شکل $\sin \theta$ را بیابید. (مربع ABCD)



$$S_{\Delta AMN} = S_{\square ABCD} - (S_{\Delta NDA} + S_{\Delta MCN} + S_{\Delta ABM})$$

$$S_{\Delta AMN} = 9 - (3 + \frac{1}{2} + 3) = \frac{5}{2}$$

$$S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} \times AM \times AN \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \sqrt{13} \times \sin \theta = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{5}{13}$$

$$AM^2 = BM^2 + AB^2$$

$$AM^2 = 1 + 9 = 10 \rightarrow AM = \sqrt{10}$$

$$AN^2 = ND^2 + AD^2$$

$$AN^2 = 4 + 9 = 13 \rightarrow AN = \sqrt{13}$$